Statistički operator

1. Posmatrajmo jednu slobodnu česticu mase m koja se nalazi u oblasti prostora zapremine V i koja je u ravnoteži sa termostatom temperature T. Naći matrične elemente ravnotežnog statističkog operatora $\hat{\rho}$ koji opisuje stanje te čestice

   (a) u impulsnoj reprezentaciji, $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}|\hat{\rho}|\mathbf{p}'\rangle$,

   (b) u koordinatnoj reprezentaciji, $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}|\hat{\rho}|\mathbf{r}'\rangle$.

   Komentarisati ponašanje matričnog elementa $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kada $T \to \infty$. Komentarisati dobijeni rezultat za $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r})$. Kolika je srednja energija čestice na temperaturi T?

2. Posmatrajmo jednodimenzionalni harmonijski oscilator mase m i frekvencije ω koji je u ravnoteži sa termostatom temperature T.

   (a) Naći dijagonalne elemente (u koordinatnoj reprezentaciji) $\rho(x, x) = \langle x|\hat{\rho}|x\rangle$ ravnotežnog statističkog operatora $\hat{\rho}$ koji opisuje stanje oscilatora.
   Pomoć: Izračunati $x\rho(x, x)$ i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\rho(x, x)$.

   (b) Diskutovati ponašanje $\rho(x, x)$ u graničnim slučajevima $\hbar\omega \ll k_B T$ i $\hbar\omega \gg k_B T$.

   (c) Izračunati $\langle \hat{H}\rangle$, kao i srednje vrednosti kinetičke i potencijalne energije, u ravnotežnom stanju.

3. Naći vandijagonalne elemente (u koordinatnoj reprezentaciji, $x \neq x'$) $\rho(x, x') = \langle x|\hat{\rho}|x'\rangle$ statističkog operatora jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora mase m i frekvencije ω koji je u ravnoteži sa termostatom temperature T.
   Uputstvo: Uvesti koordinate r, s relacijama $x = r + s$, $x' = r - s$ i dalje računati slično kao u zadatku 2.

4. Naći matrične elemente $\rho(p, p')$ statističkog operatora jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora mase m i frekvencije ω koji je u ravnoteži sa termostatom temperature T. Uveriti se da u limesu $\hbar\omega \ll k_B T$, $\rho(p, p)$ teži klasičnom Maxwell−Boltzmannovom rezultatu. Komentarisati rezultat za $\rho(p, p)$ u limesu $\hbar\omega \gg k_B T$.

5. Spinski deo Hamiltonijana elektrona u magnetnom polju $\mathbf{B}$ glasi $\hat{H} = \mu_B\, \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}$, gde je $\mu_B = |e|\hbar/(2m_e)$ Borov magneton, dok su $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}^x, \hat{\sigma}^y, \hat{\sigma}^z)$ Paulijeve matrice. Uzeti da je $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Naći statistički operator koji opisuje stanje tog elektrona na temperaturi T u reprezentaciji: (a) u kojoj je $\hat{\sigma}^z$ dijagonalno; (b) u kojoj je $\hat{\sigma}^x$ dijagonalno. Naći srednju vrednost $\langle \hat{\sigma}^z\rangle$ u ovim reprezentacijama i uveriti se da srednja vrednost ne zavisi od izbora reprezentacije.

6. U zadatku 5 uzeti da je $\mathbf{B} = B\mathbf{n}$, gde je $\mathbf{n}$ jedinični vektor. Naći statistički operator na temperaturi T. Specijalno, kako izgleda rezultat u reprezentaciji u kojoj je $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ dijagonalno. Izračunati očekivanu vrednost magnetnog momenta elektrona $\hat{\boldsymbol{\mu}}_s$ koji potiče od spinskog stepena slobode.

7. Sistem sa dva nivoa opisan je Hamiltonijanom

   $$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{ee} & H_{eg} \\ H_{ge} & H_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon/2 & \delta/2 \\ \delta/2 & -\epsilon/2 \end{pmatrix}$$

   gde su $H_{ij} = \langle i|\hat{H}|j\rangle$ $(i, j \in \{g, e\})$ matrični elementi Hamiltonijana, dok su ϵ,δ konstante odgovarajućih dimenzija. U početnom trenutku $t = 0$ sistem je u stanju $|e\rangle$.

   (a) Naći statistički operator koji opisuje stanje sistema u trenutku t.

   (b) Na osnovu dobijenog rezultata, naći verovatnoću da u trenutku t sistem bude u stanju $|g\rangle$.

8. Ansambl atoma srebra (svaki atom je spina 1/2) pripremljen je tako da se 60% atoma nalazi u svojstvenom stanju operatora $z-$projekcije spina $\hat{s}_z$ za svojstvenu vrednost $s_z = \hbar/2$, dok se 40% atoma nalazi u svojstvenom stanju operatora $x-$projekcije spina $\hat{s}_x$ za svojstvenu vrednost $s_x = -\hbar/2$. Potom se sistem postavi u homogeno magnetno polje $\mathbf{B} = B_0\, \mathbf{e}_y$, pri čemu je Hamiltonijan interakcije jednog atoma srebra sa magnetnim poljem dat kao $\hat{H} = \mu\, \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}}/\hbar$, gde je μ magnetni moment atoma srebra. Naći statistički operator $\hat{\rho}(t)$, kao i očekivanu vrednost $\langle \hat{s}_z\rangle_t$ u trenutku t.

9. Hamiltonijan koji opisuje dinamiku atoma spina 1 je $\hat{H} = A\hat{s}_z^2 + B(\hat{s}_x^2 - \hat{s}_y^2)$, gde su $\hat{s}_x, \hat{s}_y$ i $\hat{s}_z$ redom operatori x, y i z projekcije spinskog momenta impulsa koje su u bazisu svojstvenih stanja operatora $\hat{s}_z$ reprezentovane kao

   $$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{s}_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{s}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Uzeti da se atom u $t = 0$ nalazi u svojstvenom stanju operatora $\hat{s}_x$ za svojstvenu vrednost $+\hbar$. Napisati statistički operator koji opisuje stanje atoma u trenutku $t = 0$, $\hat{\rho}(0)$, naći statistički operator $\hat{\rho}(t)$ za $t > 0$ i izračunati $\langle \hat{s}_z\rangle_t$. Zadatak raditi u bazisu svojstvenih stanja operatora $\hat{s}_z$.