23.I 2019.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Sistem sa dva nivoa (osnovno stanje $|g\rangle$ i pobuđeno stanje $|e\rangle$) opisan je Hamiltonijanom

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} H_{gg} & H_{ge} \\ H_{eg} & H_{ee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta/2 & W/2 \\ W/2 & \Delta/2 \end{pmatrix}$$

pri čemu su $-\Delta/2$ i $\Delta/2$ energije stanja $|g\rangle$ i $|e\rangle$, respektivno, dok je $W/2$ matrični element Hamiltonijana koji opisuje prelazak između stanja $|g\rangle$ i $|e\rangle$. Sistem se nalazi u termalnoj ravnoteži na temperaturi T.

   (a) Odrediti reprezentaciju matrice gustine koja opisuje ravnotežno stanje sistema u bazisu $\{|g\rangle, |e\rangle\}$.

   (b) Kako izgleda reprezentacija matrice gustine koja opisuje ravnotežno stanje sistema u bazisu svojstvenih stanja Hamiltonijana?

2. Razmotrimo idealni gas koji se sastoji od N čestica koje se nalaze u trodimenzionalnom sudu zapremine V. Disperziona relacija (zavisnost jednočestične energije ε od talasnog vektora $\mathbf{k}$) je oblika $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \alpha \cdot |\mathbf{k}|^s$, gde je $s > 0$ realni broj, dok je α pozitivna realna konstanta odgovarajućih dimenzija.

   (a) Izračunati jednočestičnu gustinu stanja $g(\varepsilon)$ za fiksiranu vrednost spina.

   (b) Ako su razmatrane čestice fermioni spina $\frac{1}{2}$, izračunati Fermijevu energiju ε_F u funkciji N, V, α i s.

   (c) Ako su razmatrane čestice bozoni spina 0, formulisati uslov koji treba da zadovoljava realni broj s da bi kritična temperatura Bose–Einstein kondenzacije bila nenulta.

3. Cooper je 1956. godine pokazao da dva elektrona koji međusobno interaguju privlačnom interakcijom u prisustvu potpuno popunjenog Fermijevog mora na nuli temperature formiraju vezano stanje (tzv. Cooperov par). Izračunati srednji radijus ξ_0 Cooperovog para u osnovnom stanju, koji se definiše kao $\xi_0 = \sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle}$, gde je $\mathbf{r}$ vektor relativnog položaja jednog elektrona iz para u odnosu na drugi, dok je

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{\int \mathrm{d}^3\mathbf{r} |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r}^2}{\int \mathrm{d}^3\mathbf{r} |\psi_0(\mathbf{r})|^2}.$$

Energiju veze para E_b smatrati poznatom. Pretpostaviti da se orbitalni deo talasne funkcije osnovnog stanja para može razviti po bazisu ravnih talasa kao (k_F je Fermijev talasni vektor)

$$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ |\mathbf{k}| > k_F}} g_{\mathbf{k}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}.$$

Zanemariti interakciju posmatranog para elektrona sa elektronima iz Fermijevog mora. Matrični elementi potencijala međusobne interakcije posmatranog para elektrona (Ω je zapremina na koju se vrši normiranje)

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \, V(\mathbf{r})$$

su oblika

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \varepsilon_F \leq \varepsilon_{\mathbf{k}}, \varepsilon_{\mathbf{k}'} \leq \varepsilon_F + \hbar\omega_c \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

gde je $V > 0$, ε_F je Fermijeva energija, $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2/(2m)$, dok je $E_b \ll \hbar\omega_c \ll \varepsilon_F$.

Zadatke pripremio
dr Veljko Janković