

# Numeričko proučavanje osobina Boze-Ajnštajn kondenzata

Antun Balaž

Laboratorija za primenu računara u nauci (SCL)

Institut za fiziku Beograd, Pregrevica 118, 11080 Beograd

<http://www.scl.rs/>

## Sadržaj

- Uvod: zašto je kvantna statistička fizika tako interesantna?
  - Makroskopski kvantni fenomeni
  - Šta je Boze-Ajnštajn kondenzacija?
  - Kako se BEC vidi u eksperimentima?
  - Aktuelni istraživački problemi
- BEC kod idealnih gasova
  - Jednočestična slika
  - Boze-Ajnštajn raspodela
- BEC u slabo interagujućim kvantnim gasovima
  - Hartree-Fock-Bogoljubov aproksimacija
  - Gross-Pitaevskii jednačina
  - Rotirajući BEC
- Numeričko proučavanje Boze-Ajnštajn kondenzacije
  - Propagacija u imaginarnom i realnom vremenu
  - Proučavanje formiranja vorteksa

# Makroskopski kvantni fenomeni

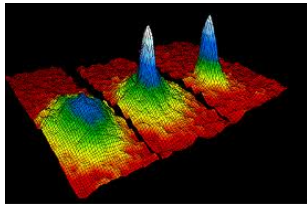
- Da li kvantni efekti uvek predstavljaju samo male popravke?
- Šta je to super u fizici?
  - superprovodljivost
  - superfluidnost
  - supersimetrija (ali to nije iz ove priče)
- Laseri - kvantna koherencija na makroskopskom nivou
- Makroskopski kvantni fenomeni: pojave koje su posledica čisto kvantne prirode materije

## Šta je Boze-Ajnštajn kondenzacija?

- Bose (1924) i Einstein (1925) su proučavali statistiku čestica sa celobrojnim spinom
- Odmah su zaključili da na veoma niskim temperaturama svi bozoni treba da pređu u osnovno stanje
  - fazni prelaz - Boze-Ajnštajn kondenzacija (BEC)
  - koherentno, globalno osnovno stanje, ne skup pojedinačnih čestica od kojih je svaka u svom osnovnom stanju
- Kako to da se u prirodi ne vidi materija u stanju Boze-Ajnštajn kondenzacije, npr. fotoni?
  - gustina čestica
  - temperatura
- London (1938) je predložio da je superfluidnost jedna od manifestacija BEC
- Bogoljubov (1947) je formulisao prvu mikroskopsku teoriju superfluidnosti, baziranu na ovoj ideji

## Kako se BEC vidi u eksperimentima?

- Tehnološki jedan od najtežih poduhvata u fizici - hlađenje do nanokelvinskog nivoa
- Cornell, Wiemann ( $^{87}\text{Rb}$ ) i Ketterle ( $^{23}\text{Na}$ ) su, konačno, 1995. godine uspjeli da u eksperimentima postignu BEC
- Hladni alkalni metali:  
Rb, Li, Na, Cs  
 $T \sim 1 \text{ nK}$ ,  $\rho \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$
- Nobelova nagrada za fiziku (2001)
- Lokalizacija i u realnom i u  $k$ -prostoru
- Simetrija osnovnog stanja
- Jačina interakcije između atoma može da se fino podešava, kao i dimenzionalnost, pa čak i tip interakcije

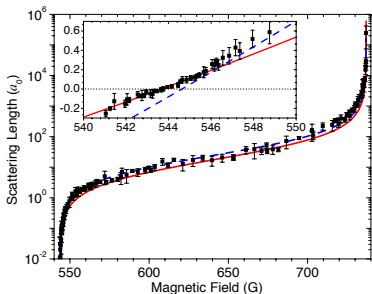


## Fešbah rezonance

- Jačina interakcija između atoma zavisi od spoljašnjeg magnetnog polja
- Ova zavisnost ima rezonantnu prirodu, što omogućava promenu jačine interakcije od negativnih do pozitivnih vrednosti, u opsegu od nekoliko redova veličina
- Phys. Rev. Lett. **102**, 090402 (2009):  $^7\text{Li}$

$$a(B) = a_{\text{BG}} \left( 1 + \frac{\Delta}{B - B_{\infty}} \right)$$

$$a_{\text{BG}} = -24.5 a_0, \quad B_{\infty} = 736.8 \text{ G}, \\ \Delta = 192 \text{ G}$$



## Aktuelni istraživački problemi

- Termalne fluktuacije i ekscitacije
- Kolektivne mode, modulacija interakcija i frekvencije zamke
- Solitoni
- Dipolne interakcije, uključujući molekularni BEC
- Optičke rešetke
  - in-situ simulacije važnih fenomena iz fizike kondenzovanog stanja materije
- Vortkesi, kvanta turbulencija, kvantni haos
- Uticaj neuređenosti, kvantni fazni prelazi
- ...

# Jednočestična slika (1)

- Dobra aproksimacija za slabo interagujuće / retke gasove
- Višečestična stanja se dobijaju iz jednočestičnih stanja
  - Boze statistika, identične čestice
- Višečestični spektar se dobija iz jednočestičnog spektra
- U okviru velikog kanonskog ansambla, particiona funkcija idealnog Boze gasa je

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\nu\}} e^{-\beta(E_{\{\nu\}} - \mu N_{\{\nu\}})}$$

gde je

$$E_{\{\nu\}} = \sum_i N_i E_i, \quad N_{\{\nu\}} = \sum_i N_i$$

a  $N_i$  je naseljenost  $i$ -tog jednočestičnog energetskog nivoa





## Jednočestična slika (2)

- Particiona funkcija može da se izrazi preko jednočestičnog spektra

$$\mathcal{Z} = \prod_i \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_i - \mu)}}$$

Slobodna energija je data sa

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z} = \frac{1}{\beta} \sum_i \ln(1 - e^{-\beta(E_i - \mu)}) = -\frac{1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m\beta\mu}}{m} \mathcal{Z}_1(m, \beta)$$

gde je  $\mathcal{Z}_1(m, \beta)$  jednočestična partitiona funkcija

- Broj čestica se može izraziti kao

$$N = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu} = \sum_{m=1}^{\infty} (e^{m\beta\mu} \mathcal{Z}_1(m, \beta) - 1)$$

# Boze-Ajnštajn raspodela

- Srednji broj čestica na nivou  $i$  je

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\nu\}} N_i e^{-\beta(E_{\{\nu\}} - \mu N_{\{\nu\}})}$$

- Posle kraćeg računa dobija se

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1}$$

- Ovo je Boze-Ajnštajn raspodela, koja opisuje
  - idealne i slabo interagujuće bozonske gasove
  - nisko-temperaturno ponašanje bozona malih gustina

# Boze-Ajnštajn kondenzacija

- Fazni prelaz makroskopskog broja bozona u osnovno stanje na niskim temperaturama ( $T_c$ )
  - $N_0$  postaje uporedivo sa  $N$
  - hemijski potencijal  $\mu$  teži  $E_0$
- Makroskopski kvantni fenomen koji leži u osnovi
  - superfluidnosti
  - niskotemperaturne superprovodnosti
- Parametar poretka  $\Psi(\vec{r})$
- Broj čestica

$$N = N_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{e^{\beta(E_n - E_0)} - 1}$$

# Realističan opis BEC

- Pravi opis BEC je mnogočestična kvantna teorija
- Tipičan broj čestica u eksperimentima je od  $10^3$  do  $10^6$
- Zbog termalnih fluktuacija, broj čestica u kondenzatu nije održan - veliki kanonski ansambl
- Formalizam druge kvantizacije

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\Psi}(\vec{r})^\dagger \nabla \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}' \hat{\Psi}(\vec{r})^\dagger \hat{\Psi}(\vec{r}')^\dagger V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \right\}$$

- Teorija srednjeg polja (mean field)
- Razvoj u red do kvadratnih članova
- Hartree-Fock-Bogoljubov aproksimacija
- Thomas-Fermi aproksimacija

# Teorija srednjeg polja

- Što jednostavniji opis (ali ne jednostavniji nego što može!)
- Kontaktna interakcija:  $V_{\text{int}}(\vec{r}' - \vec{r}) = g\delta(\vec{r}' - \vec{r})$
- Niska temperatura ( $T = 0$ ), nema termalnih ekscitacija
- Gross-Pitaevskii jednačina

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t)$$

- $\Psi(\vec{r}, t)$  je talasna funkcija kondenzata (parametar poretka)
- $V_{\text{trap}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$  je harmonijska zamka
- $V = V_{\text{int}} + V_{\text{trap}}$
- $g = \frac{4\pi\hbar^2 Na}{m}$ , gde je  $a$  dužina rasejanja (s-wave scattering length), a  $N$  je broj atoma u kondenzatu

# Numeričko proučavanje Boze-Ajnštajn kondenzacije

- Računanje osnovnog stanja
  - Propagacija u imaginarnom vremenu
  - Varijacioni pristup
- Dinamika BEC - propagacija u realnom vremenu
- Semi-implicitni Crank-Nicolson metod za rešavanje GP jednačine
- Rotirajući BEC

$$\hat{H}(\Omega) = \hat{H}_0 - \Omega \int d^3\vec{r} \hat{L}_z \hat{\Psi}(\vec{r}), \quad \hat{L}_z = i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

# Proučavanje vorteksnih stanja (1)

(Loading vort-1.mpg)

Propagacija u imaginarnom vremenu ka osnovnom vorteksnom stanju za  $\Omega/\omega = 0.6$

# Proučavanje vorteksnih stanja (3)

(Loading vort-3.mpg)

Propagacija u imaginarnom vremenu ka osnovnom vorteksnom stanju za  $\Omega/\omega = 0.7$



# Proučavanje vorteksnih stanja (6+1)

(Loading vort-6-1.mpg)

Propagacija u imaginarnom vremenu ka osnovnom vorteksnom stanju u anharmonijskoj zamci za  $\Omega/\omega = 2$

## Trenutni i budući istraživački problemi

- Proučavanje uticaja modulacije interakcije na kolektivne mode kondenzata
- Dinamičko formiranje i evolucija vorteksa u kondenzatu
- Uticaj neuređenosti na osobine BEC
- Bose-glass fazni prelaz
- Faradejevi talasi u BEC

# Dobrodošli u SCL!

