

Marina Radulaški

Parametri i podstrukture scale-free mreža

mentor: Dr Aleksandar Belić

Laboratorija za primenu računara u nauci
Institut za fiziku, Beograd

Apstrakt

U ovom radu ispitivane su globalne i strukturne osobine scale-free mreža generisanih prema Barabaši-Albert modelu. Zavisnosti small world koeficijenta i klastering koeficijenta od veličine mreže su proširene na zavisnosti po parametru m . Pronađena je zavisnost broja pojavljivanja podstrukture veličine tri od veličine mreže i parametra m . Ispitana je uspešnost brojanja pojavljivanja podstrukture veličine tri po random i preferencijalno biranom podskupu čvorova kao heuristike za ocenu istih vrednosti na nivou cele mreže. Random odabir se pokazao kao jednostavniji, ali manje precizan metod. Za preferencijalni odabir uvedene su formule i koeficijenti pomoću kojih se može oceniti broj podstrukture veličine tri za $1 < m < 8$.

Uvod

Proučavanje kompleksnih mreža počelo je 50-ih godina prošlog veka, uporedo sa razvojem teorije grafova. Tokom druge polovine XX veka korišćena je najjednostavnija realizacija mreže, random mreža - Erdoš-Renji (ER) model. Random mreža predstavlja skup čvorova, kod kojih veza između svaka dva čvora postoji sa određenom verovatnoćom.

Ako posmatramo broj veza koje čvor poseduje - k (stepen čvora) i broj čvorova stepena k , možemo odrediti raspodelu povezanosti. Raspodela povezanosti predstavlja verovatnoću $P(k)$ da proizvoljan čvor u mreži bude stepena k , odnosno da ima k veza. Kod ER modela raspodela povezanosti $P(k)$ je Puasonova.

Pred sam kraj XX veka, od 1999. godine, istraživanja su pokazala da raspodele povezanosti realnih mreža, kao što su World Wide Web, Internet, metaboličke mreže itd. [1], prate stepeni zakon,

$$P(k) \sim k^{-\gamma}.$$

Ovakve mreže su nazvane scale-free (SF) mreže. Njihova karakteristika je veliki broj čvorova malog stepena i mali broj čvorova velikog stepena. Scale-free mreže se pokazuju kao vrlo uspešne u modeliranju društvenih, bioloških, infrastrukturnih i mnogih drugih mreža.

U ovom radu ispitivali smo globalne i strukturne osobine scale-free mreža.

Generisanje scale-free mreže i njeni parametri

Rad na scale-free mrežama počeli smo generisanjem mreže sa stepenom raspodelom povezanosti koristeći Barabaši-Albert (BA) model [1]. Prema ovom modelu generisanje SF mreže počinje sa malom random mrežom, na koju se preferencijalno dodaju novi čvorovi.

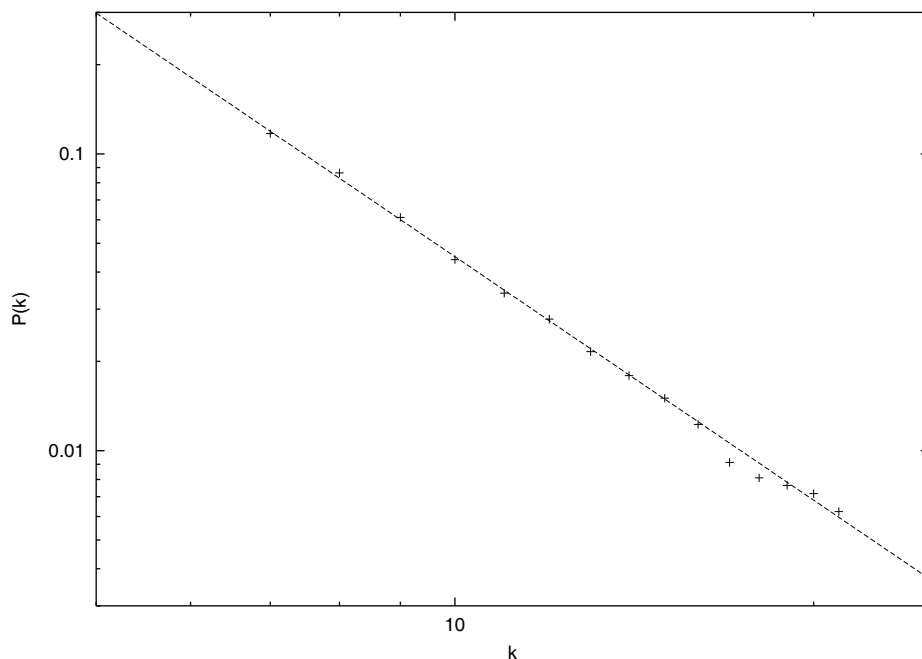
Random mrežu generišemo tako što n_0 čvorova povežemo međusobno sa verovatnoćom p , odnosno verovatnoća povezivanja svaka dva od datih n_0 čvorova je jednaka p . Zatim u svakom sledećem trenutku u mrežu uvodimo po jedan novi čvor, tako da je u trenutku t veličina mreže jednaka $n_0 + t$. Svaki novi čvor se povezuje sa tačno m već postojećih čvorova, dakle, broj veza se u svakom trenutku poveća za m . Povezivanje se vrši preferencijalno, što znači da je verovatnoća povezivanja sa k -tim čvorom proporcionalna njegovom stepenu s_k (tj. broju veza sa drugim čvorovima) i iznosi $\frac{s_k}{\sum_i s_i}$, gde je $\sum_i s_i$

zbir stepeni svih čvorova u trenutnoj mreži. Preferencijalnim povezivanjem novih čvorova mreža dobija scale-free raspodelu povezanosti $P(k) = ck^{-\gamma}$ (slika 1). Vrednosti koeficijenta γ koje smo dobili u generisanim mrežama pripadaju intervalu (2.50, 2.85). Inače, većina realnih scale-free mreža ima vrednost koeficijenta γ u intervalu (2, 3].

Rastojanje između dva čvora u mreži predstavlja najmanji broj koraka (prelazaka sa čvora na čvor) potrebnih da bi se stiglo od jednog do drugog čvora. Čvorovi čije je međusobno rastojanje jedan se nazivaju susedni čvorovi.

Srednje rastojanje između dva čvora u mreži nazivamo poluprečnik mreže ili small world koeficijent. Zavisnost small world koeficijenta od veličine mreže je logaritamska [1] (slika 2) i može se fitovati na funkciju $y = a_r + b_r \ln x$.

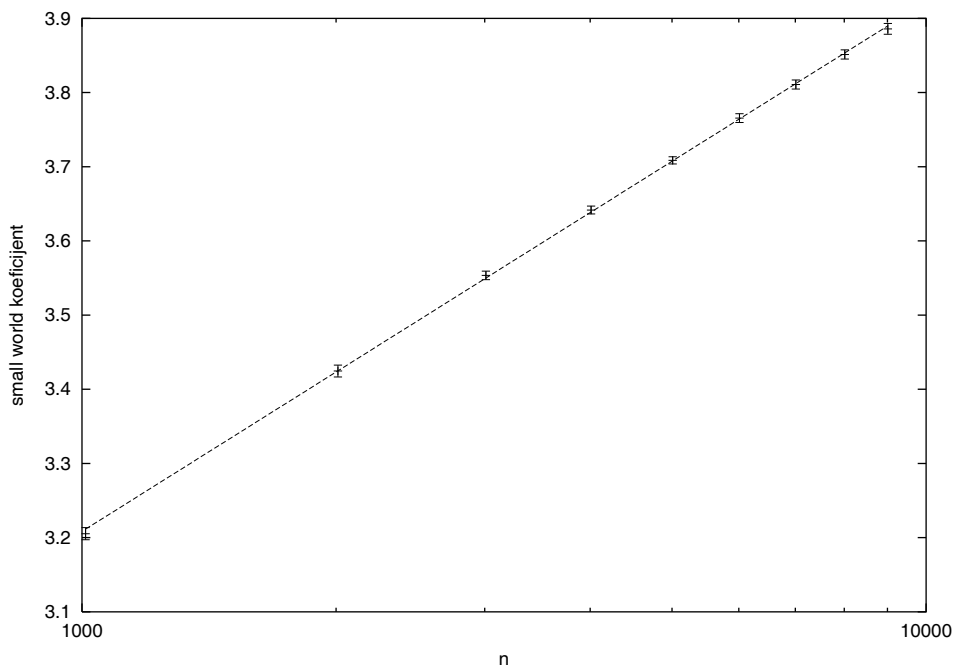
Sve dobro povezane mreže se odlikuju malom vrednošću small-world koeficijenta. Primer takvih mreža je mreža ljudskih poznanstava [2], u kojoj su ljudi predstavljeni čvorovima, a njihova poznanstva vezama između čvorova. Poluprečnik ove mreže (grubo) iznosi šest, odnosno, u proseku, bilo koja dva čoveka na svetu su 'šest poznanika daleko'.



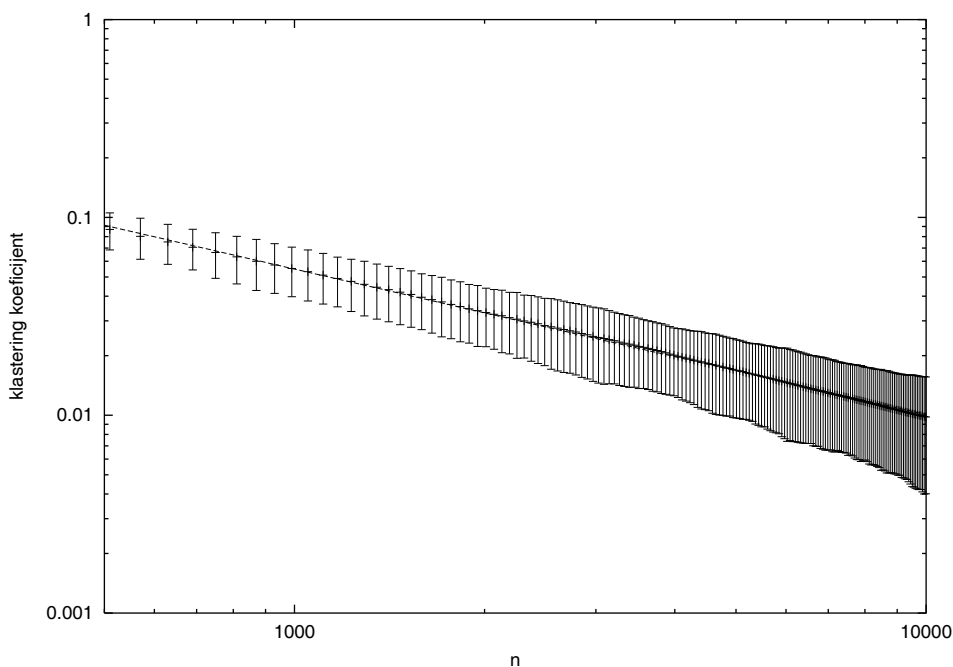
Slika 1: Log-log grafik raspodele povezanosti $P(k)$ na generisanoj scale-free mreži veličine $n = 5.010$, ostali parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 5$. Prikazana je i fitovana funkcija $y = cx^{-\gamma}$, $c = 24,6(6)$, $\gamma = 2,74(2)$.

Još jedan od značajnih globalnih parametara mreže je klastering koeficijent i , kao što ime nagoveštava, govori o klasterisanosti, odnosno, stepenu grupisanosti mreže. Klastering koeficijent se računa kao srednji odnos broja postojećih i broja mogućih veza među prvim susedima svakog čvora, a računa se pomoću izraza $\frac{1}{n} \frac{\sum t_i}{s_i(s_i - 1)/2}$, gde je n broj čvorova u mreži, s_i stepen i -tog čvora, a t_i broj veza među susedima i -tog čvora, odnosno broj 'trouglova'* u kojima je sadržan i -ti čvor. Vrednost klastering koeficijenta stepeno opada sa povećanjem broja čvorova u mreži [1] i stoga smo je fitovali na funkciju $y = a_e x^{-b_c}$ (slika 3).

* Preciznije o pojmu 'trougao' u sledećem poglavlju.



Slika 2: Zavisnost small world koeficijenta od veličine mreže, fitovana na funkciju $y = a_r + b_r \ln x$, $a_r = 1.07(2)$, $b_r = 0.310(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa četiri različite mreže.



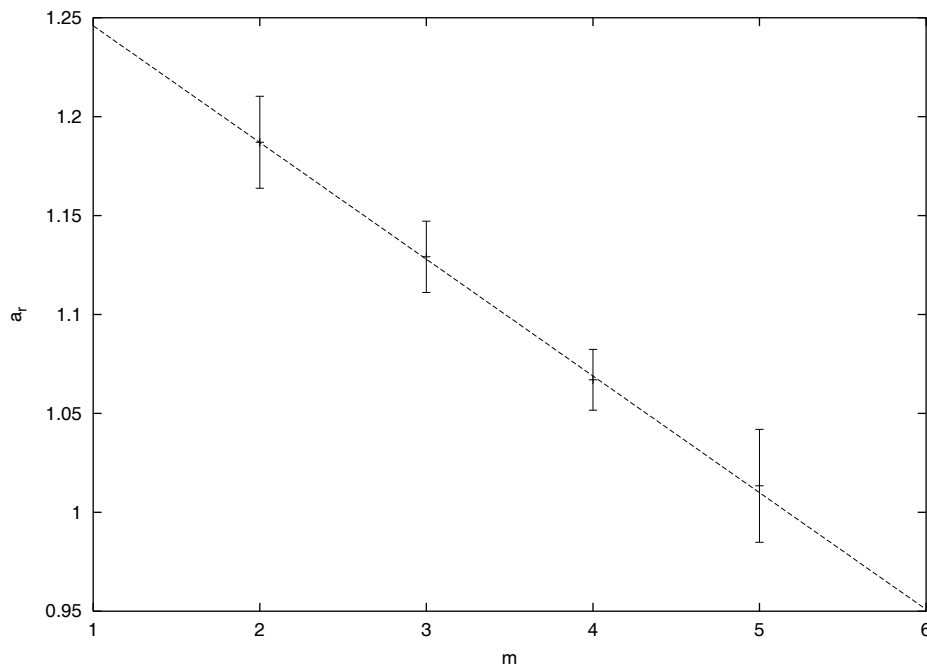
Slika 3: Log-log grafik zavisnosti klastering koeficijenta od veličine mreže, fitovane na $y = a_c x^{-b_c}$, $a_c = 8.87(2)$, $b_c = 0.7362(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 8$, a vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa deset različitih mreža.

Broj veza m koje se dodeljuju novom čvoru pri uvođenju u mrežu utiče na povezanost čvorova u vezi, a samim tim i na njihovo srednje rastojanje - poluprečnik, kao i na klastering koeficijent. Zato su koeficijenti a_r, b_r, a_c i b_c iz prethodnih funkcija zavisni od broja veza m novog čvora pri uvođenju u mrežu.

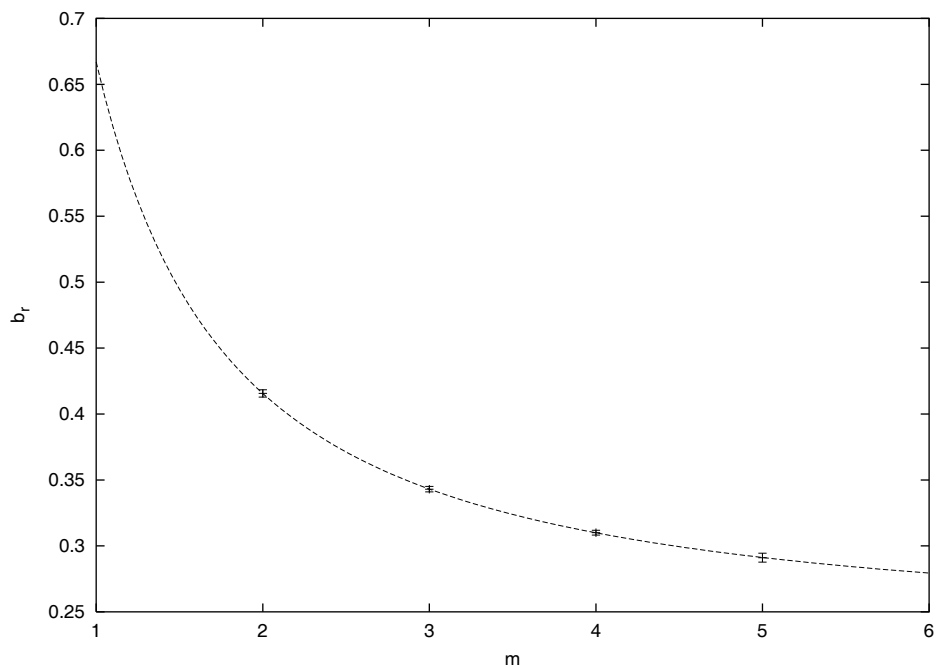
Pri razmatranju zavisnosti koeficijenata od m isključujemo slučaj $m = 1$, zbog njegove osobine da se pri dodavanju novih čvorova u mrežu, za razliku od slučajeva kada je $m \geq 2$, ne mogu napraviti zatvorene putanje, odnosno konture, što dalje ima specifičan uticaj na vrednosti poluprečnika i klastering koeficijenta.

Kada, pri istoj veličini mreže, povećavamo m , mreža postaje povezanija, stoga postaje lakše stići od jednog čvora do drugog, pa se poluprečnik mreže smanjuje. To nam pokazuju i koeficijenti zavisnosti poluprečnika od veličine mreže, čije vrednosti monotono opadaju sa povećanjem vrednosti m . Zavisnost koeficijenta $a_r(m)$ najbolje fituje na linearnu funkciju $y = a_{r1} - a_{r2}x$ (slika 4), a $b_r(m)$ na stepenu funkciju $y = b_{r1} + b_{r2}x^{-b_{r3}}$ (slika 5).

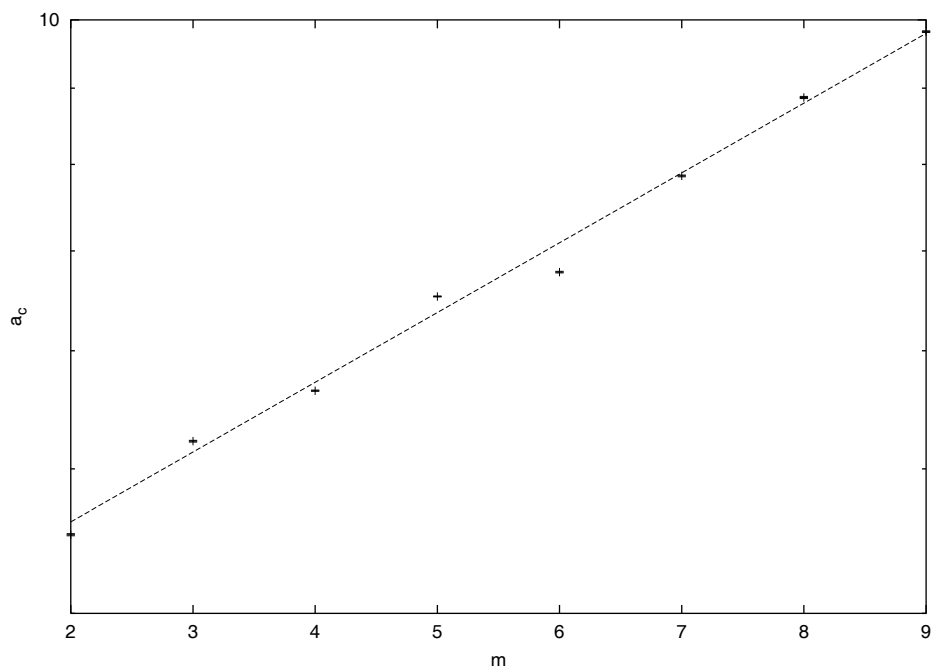
Vrednost klastering koeficijenta za istu veličinu mreže raste sa povećanjem vrednosti m . Ipak, nagib grafika zavisnosti klastering koeficijenta od vrednosti mreže se može smatrati istim za sve m . Zato vrednost koeficijenta a_c raste sa povećanjem vrednosti m , pa smo zavisnost $a_c(m)$ fitovali na eksponencijalnu funkciju $y = a_{c1}e^{a_{c2}x}$ (slika 6), dok se vrednost koeficijenta b_c može aproksimirati konstantnom u odnosu na m (slika 7).



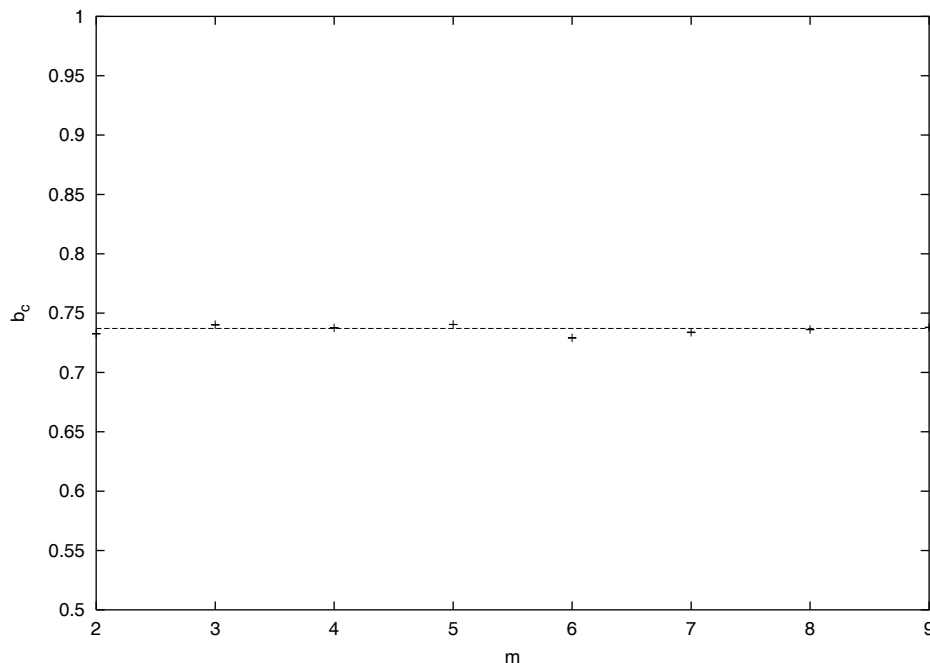
Slika 4: Zavisnost koeficijenta a_r od broja veza m novog čvora, fitovana na linearnu funkciju $y = a_{r1} - a_{r2}x$, $a_{r1} = 1.305(5)$, $a_{r2} = 0.059(2)$.



Slika 5: Zavisnost koeficijenta b_r od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju $y = b_{r1} + b_{r2}x^{-b_{r3}}$, $b_{r1} = 0.233(2)$, $b_{r2} = 0.434(3)$, $b_{r3} = 1.25(2)$.



Slika 6: Semilog grafik zavisnosti koeficijenta a_c od broja veza m novog čvora, fitovane na funkciju $y = a_{c1}e^{a_{c2}x}$, $a_{c1} = 3.7(1)$, $a_{c2} = 0.108(5)$.



Slika 7: Zavisnost koeficijenta b_c od broja veza m novog čvora, fitovana na konstantnu funkciju - dobijena vrednost je $b_c = 0.737(2)$.

Podstrukture scale-free mreže

U prethodnom poglavlju smo ispitivali globalne karakteristike mreža, a sada ćemo se okrenuti ka strukturnom sastavu. Povezane podskupove čvorova * mreže nazivamo podstrukturama i one karakterišu mrežu na lokalnom nivou.

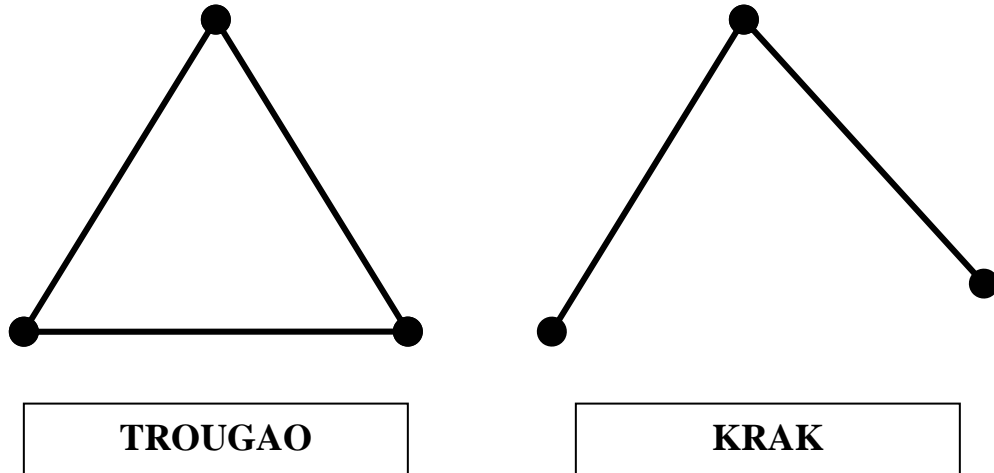
U ispitivanju strukturnog sastava scale-free mreža ograničili smo se na podstrukture sastavljene od tri čvora. S obzirom da svi čvorovi u podstrukturi moraju biti povezani (direktno ili indirektno) - postoje dva oblika podstrukture veličine tri. Zvaćemo ih 'trougao' i 'krak' (slika 8).

Zavisnost broja pojavljivanja trouglova T od veličine mreže n smo fitovali na funkciju $y = a_t (\ln x)^{b_t}$ (slika 9), a zavisnost broja pojavljivanja krakova K od veličine mreže n na funkciju $y = a_k x \ln x$ (slika 10). Intuiciju za oblike ovih funkcija stekli smo pomoću rada [3] koji se bavi problematikom podstrukture na mrežama, koje za razliku od naših imaju usmerene (jednosmerne) veze.

U slučaju $m = 1$, pri rastu mreže se ne dobijaju novi trouglovi, zato je vrednost broja trouglova T konstantna za svaku veličinu mreže i jednaka je broju trouglova u početnoj random mreži. Stoga je za slučaj $m = 1$ vrednost koeficijenta b_t jednaka nuli, a vrednost

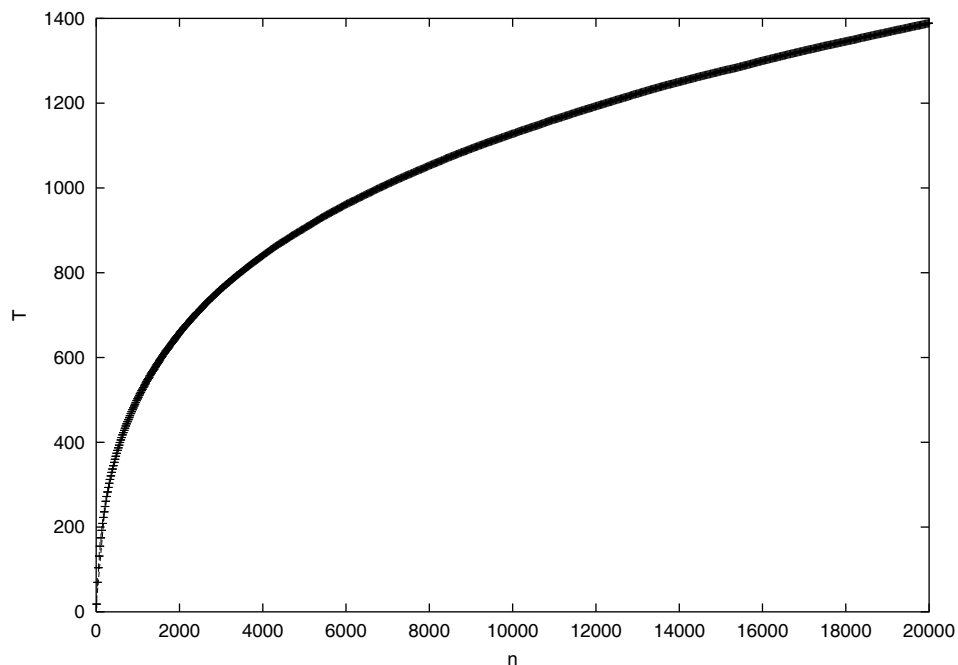
* Za svaka dva čvora iz podskupa postoji direktan ili indirektan put koji ih povezuje.

a_t nema svrhe određivati, jer potiče od random osobina početne mreže i nema nikakvog dodira sa preferencijalnim povezivanjem novih čvorova u mreži, odnosno scale-free konceptom.

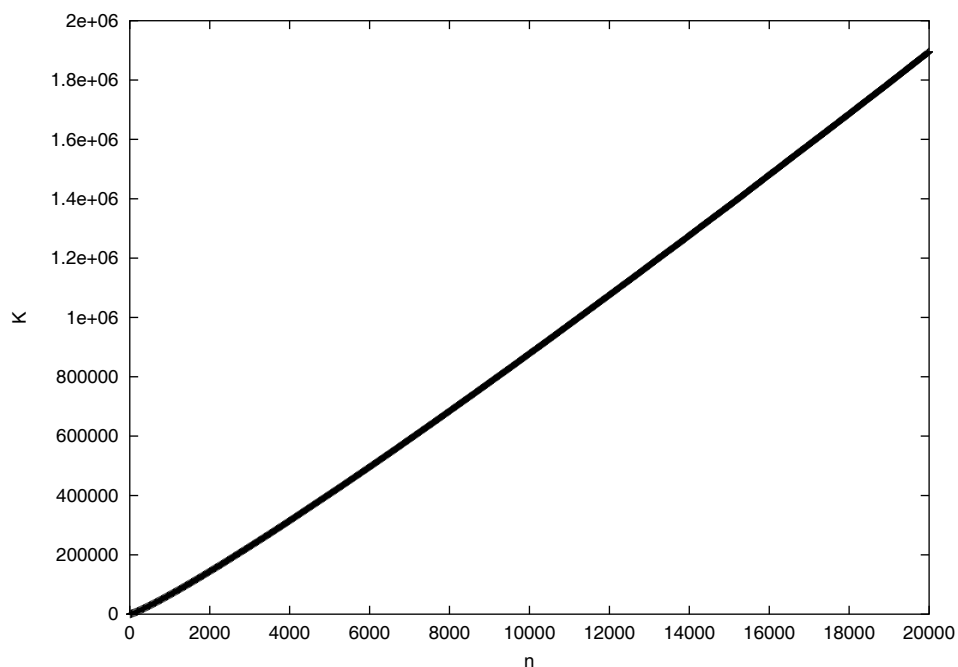


Slika 8: Vrste podstruktura veličine tri.

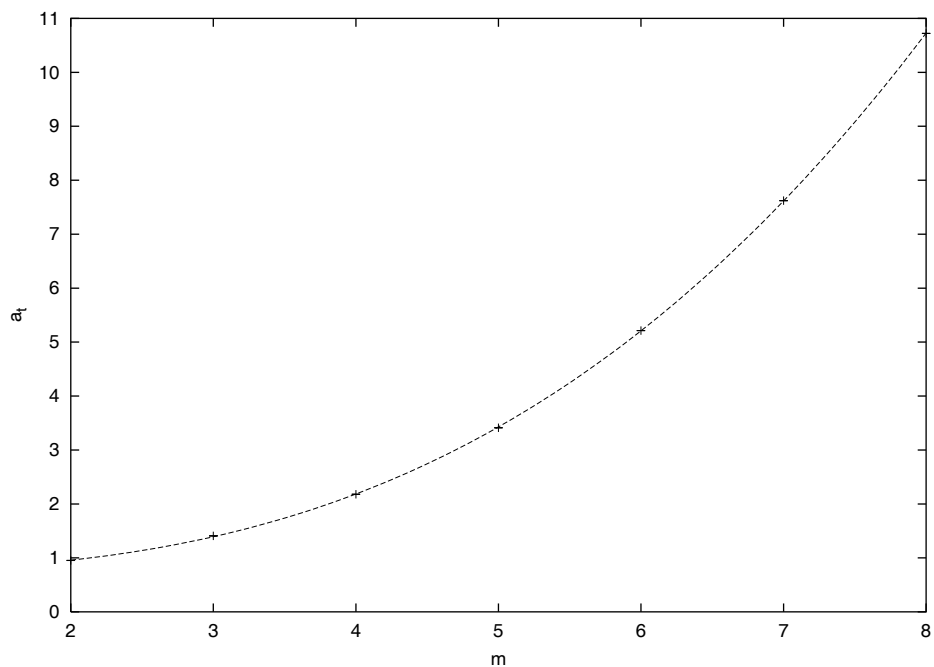
Kada povećavamo broj veza m koje se dodeljuju novom čvoru, povećava se ukupan broj veza u mreži, a stoga i broj trouglova i krakova, pa zato postoji zavisnost koeficijenata iz prethodnih funkcija od broja veza m novog čvora. Zavisnost vrednosti koeficijenta $a_t(m)$ je fitovana na stepenu funkciju $y = a_{t1} + a_{t2}x^{a_{t3}}$ (slika 11), zavisnost $b_t(m)$ konvergira ka nekoj vrednosti, pa smo je zato fitovali na funkciju $y = b_{t1}(1 - x^{-b_{t2}})^{b_{t3}}$ (slika 12), a zavisnost $a_k(m)$ na stepenu funkciju $y = a_{k1} + a_{k2}x^{a_{k3}}$ (slika 13).



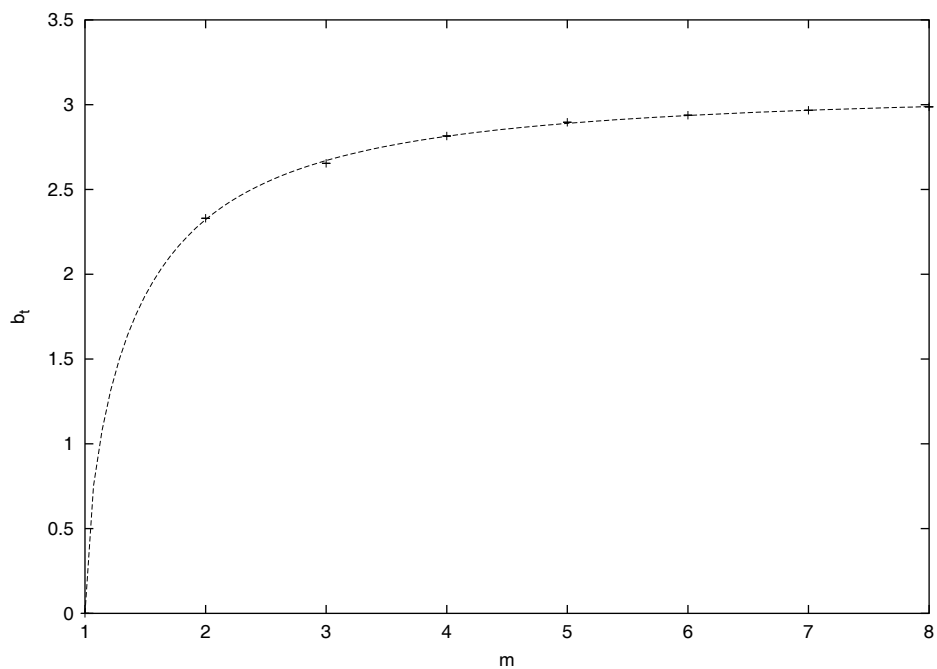
Slika 9: Zavisnost broja trouglova od veličine mreže, fitovana na funkciju $y = a_t (\ln x)^{b_t}$, $a_t = 2.1788(6)$, $b_t = 2.8152(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 100 različitih mreža.



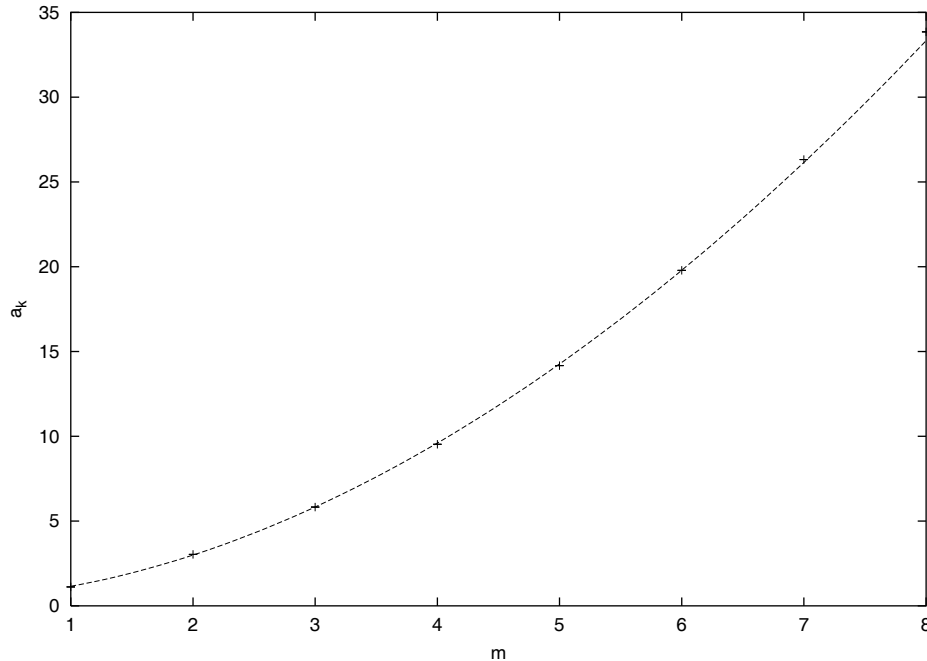
Slika 10: Zavisnost broja krakova od veličine mreže, fitovana na funkciju $y = a_k x \ln x$, $a_k = 9.5289(3)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 100 različitih mreža.



Slika 11: Zavisnost koeficijenta a_t od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju $y = a_{t1} + a_{t2}x^{a_{t3}}$, $a_{t1} = 0.75(1)$, $a_{t2} = 0.0295(8)$, $a_{t3} = 2.80(2)$.



Slika 12: Zavisnost koeficijenta b_t od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju $y = b_{t1}(1 - x^{-b_{t2}})^{b_{t3}}$, $b_{t1} = 3,10(2)$, $b_{t2} = 1.4(1)$, $b_{t3} = 0.59(5)$.



Slika 13: Zavisnost koeficijenta a_k od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju $y = a_{k1} + a_{k2}x^{a_{k3}}$, $a_{k1} = 0.44(5)$, $a_{k2} = 0.71(2)$, $a_{k3} = 1.84(2)$.

Heuristička ocena broja podstruktura u mreži

U prethodnom poglavlju smo određivali tačan broj pojavljivanja podstruktura veličine tri, u zavisnosti od parametara scale-free mreže: veličine mreže i broja veza koji se dodaju novom čvoru. Za to je bilo potrebno za svaki čvor i mreže prebrojati broj trouglova t_i i krakova k_i koje pravi sa drugim čvorovima, a zatim uračunati u ukupan zbir trouglova T , odnosno krakova K , po formulama:

$$T = \sum_i \frac{t_i}{3}, \quad K = \sum_i \frac{k_i}{3}.$$

Doprinosi $\frac{t_i}{3}$ i $\frac{k_i}{3}$ zbirovima T i K su trećine broja trouglova, odnosno krakova, koje formira čvor, jer se isti trougao, odnosno krak, uračunava tri puta - kod tri čvora koji ga čine.

Pitanje koje se postavlja (i na koje ćemo pokušati da damo odgovor) je: Da li možemo oceniti broj trouglova i krakova u scale-free mreži brojanjem t_i i k_i samo po određenim čvorovima? Time bismo uštedeli vreme, jer ne bismo pretraživali trouglove i krakove za sve, već samo za određeni procenat čvorova, što je značajna ušteda, pogotovo za mreže koje broje stotine hiljada čvorova, kao što su Internet ili World Wide Web.

Kada na mreži veličine n izaberemo određeni podskup S čvorova tako da je $\frac{|S|}{n} = q$ i za svaki od tih qn čvorova prebrojimo trouglove t_i i krakove k_i koje prave sa drugim čvorovima možemo da izračunamo sledeće vrednosti:

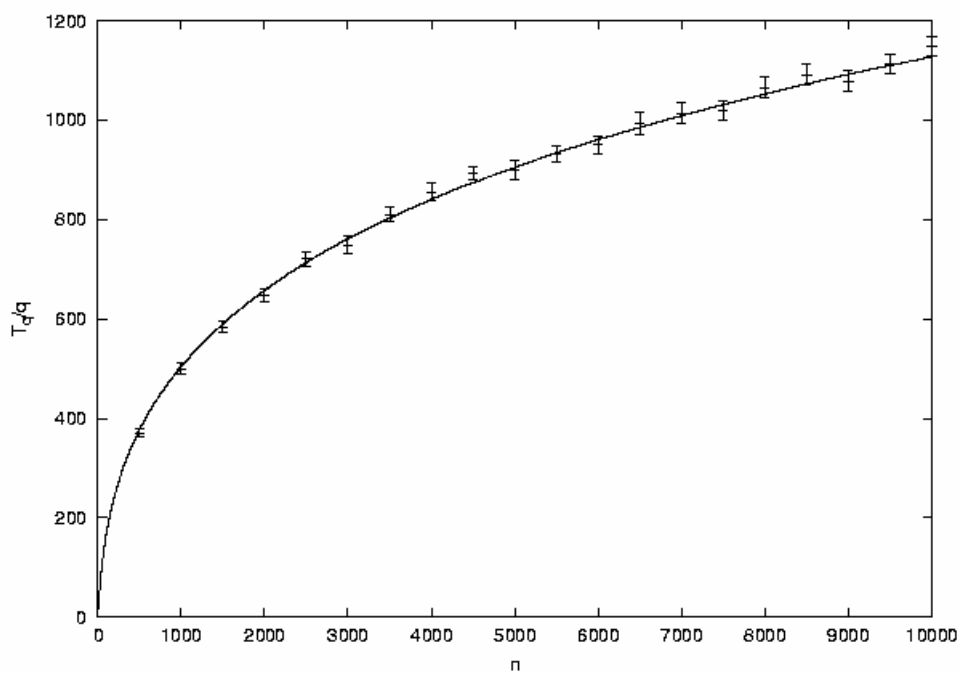
$$T_q = \sum_{i \in S} \frac{t_i}{3}, K_q = \sum_{i \in S} \frac{k_i}{3}.$$

Po definiciji važi i $T = T_{100\%}$, $K = K_{100\%}$. Ono što nas interesuje jeste kako izgledaju odnosi $t_q = \frac{T_q}{T}$, $k_q = \frac{K_q}{K}$ i za razne mreže i različito izabrane podskupove S . S obzirom da su čvorovi u mreži različitog stepena, a samim tim imaju i različite vrednosti t_i i k_i , pomenuti odnosi zavise od načina odabira podskupa S .

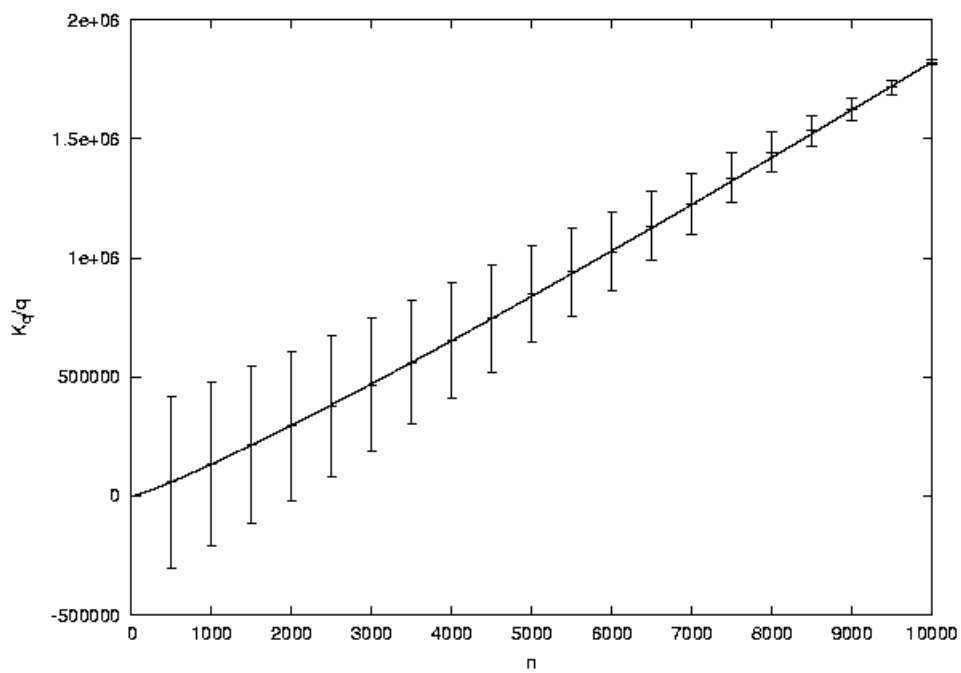
Kada se podskup S bira slučajno (na random, sa verovatnoćom $1/n$ za svaki čvor) intuitivno važi $t_q = k_q = q$, što potvrđuju dobijeni rezultati. Na slikama 14 i 15 je jedan od primera koji pokazuje da se vrednost T_q/q , odnosno K_q/q , može koristiti kao ocena vrednosti T , odnosno K . Iako u većini slučajeva procena broja trouglova, odnosno krakova, odstupa od prave vrednosti za svega par procenata, postoje i slučajevi u kojima je odstupanje veće. U tabeli 1 dati su maksimalni procenti odstupanja T_q/q od T , odnosno K_q/q od K , za različite vrednosti q . Procene su rađene za mreže veličine do 10^4 čvorova sa vrednostima parametara mreže $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 1, 2, \dots, 8$. Vrednosti su dobijene usrednjavanjem 25 različitih rezultata, a njihove greške su zadate standardnom devijacijom.

| q | 20% | 40% | 60% | 80% |
|----------------------------|-----|-----|-----|-----|
| Odstupanje broja trouglova | 15% | 10% | 5% | 4% |
| Odstupanje broja krakova | 10% | 6% | 5% | 4% |

Tabela 1: Maksimalno ostupanje ocena broja trouglova i krakova od prave vrednosti pri random odabiru dela čvorova, za razne procenat mreže q .



Slika 14: Zavisnost vrednosti T_q/q za random izabranih $q = 80\%$ mreže od veličine mreže. Prikazana je i egzaktna zavisnost $T(n)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti T_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.



Slika 15: Zavisnost vrednosti K_q / q za random izabranih $q = 60\%$ mreže od veličine mreže. Prikazana je i egzaktna zavisnost $K(n)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 6$, a vrednosti K_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.

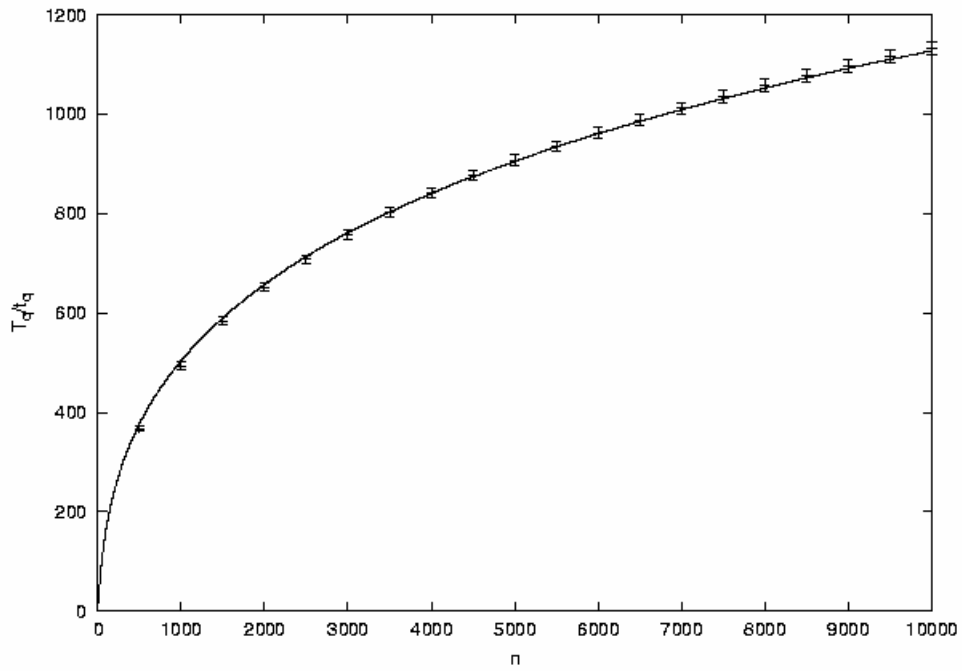
Bolji pristup odabiru čvorova možemo da napravimo uzimajući u obzir scale-free raspodelu povezanosti čvorova. Podskup čvorova možemo da biramo preferencijalno, tj. verovatnoća da čvor bude uključen u podskup nije više $1/n$, kao u random slučaju, nego proporcionalna stepenu čvora s_i . Pri preferencijalnom odabiru nije više očigledno kolike su vrednosti t_q i k_q , stoga smo pokušali da ih odredimo.

Rezultati iz predhodnog poglavlja govore da zavisnosti broja trouglova $T(n)$, odnosno krakova $K(n)$, od veličine mreže fituju na funkcije $y = a_t (\ln x)^{b_t}$, odnosno $y = a_k x \ln x$, odakle dobijamo vrednosti a_t, b_t i a_k za scale-free mreže određenih parametara i na dalje ćemo vrednosti tih koeficijenata smatrati fiksiranim. Da bismo odredili t_q i k_q , za slučaj preferencijalnog odabira, fitovaćemo zavisnost $T_q(n)$, odnosno $K_q(n)$, na

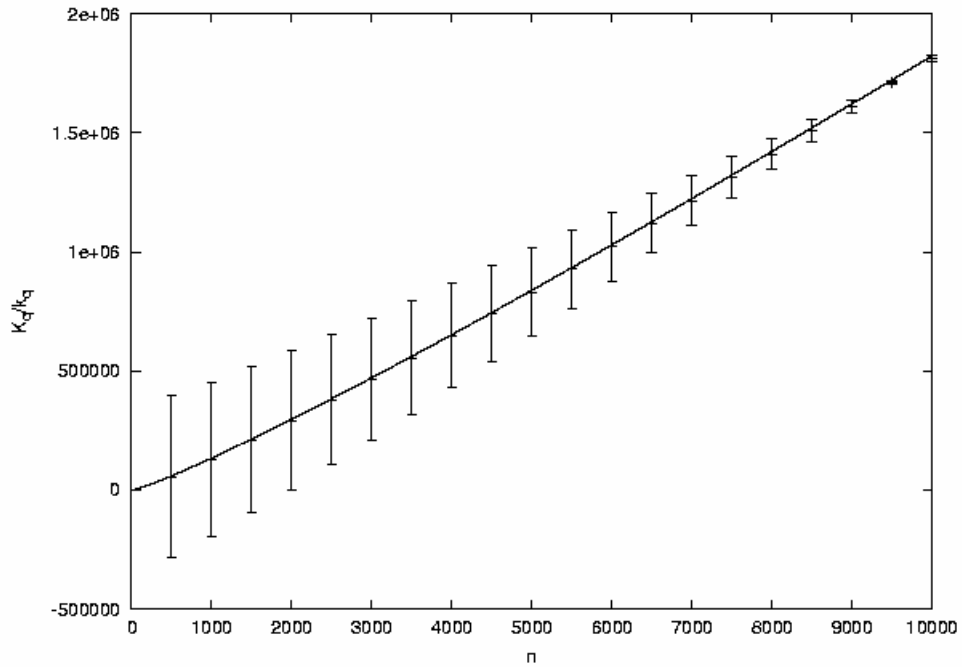
$y = t_q a_t (\ln x)^{b_t}$, odnosno $y = k_q a_k x \ln x$, koristeći promenljive a_t, b_t i a_k kao konstante čije smo vrednosti fiksirali uz pomoć rezultata predhodnog poglavlja.

Da bismo ilustrovali prednost ocenjivanja broja trouglova i krakova preferencijalnim odabirom u odnosu na random odabir, na slikama 16 i 17 pokazujemo primere zavisnosti $\frac{T_q}{t_q}$ i $\frac{K_q}{k_q}$ od veličine mreže, sa istim parametrima mreža kao na slikama 14 i 15.

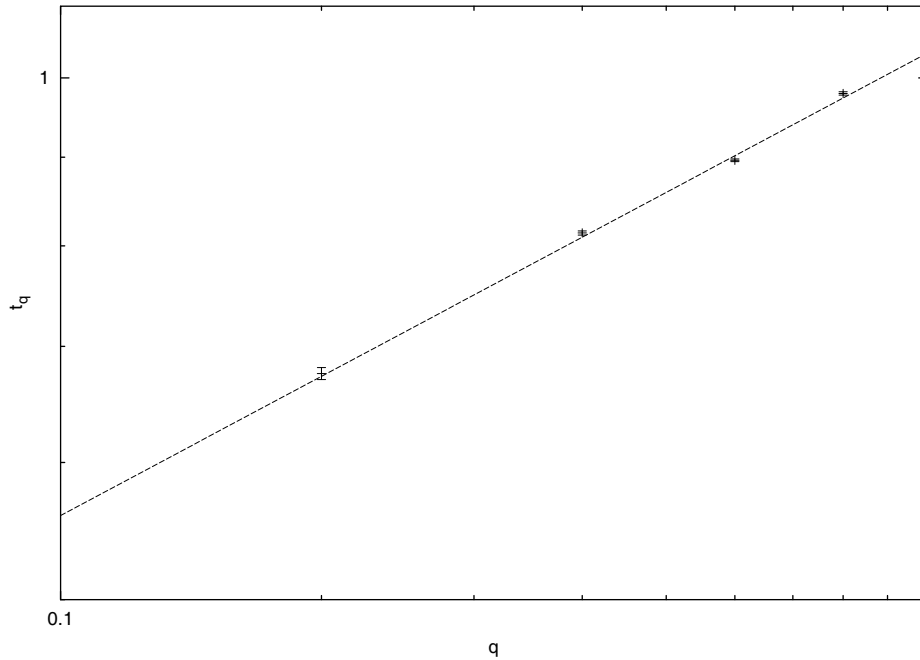
Zavisnosti koeficijenata t_q i k_q od vrednosti q , za mrežu fiksiranih parametara su linearne na log-log skali, pa se mogu fitovati na funkcije $y = \alpha_t x^{\beta_t}$ i $y = \alpha_k x^{\beta_k}$ (slike 18 i 19). Vrednosti koeficijenata $\alpha_t, \beta_t, \alpha_k, \beta_k$ za razne parametre m date su u tabeli 2.



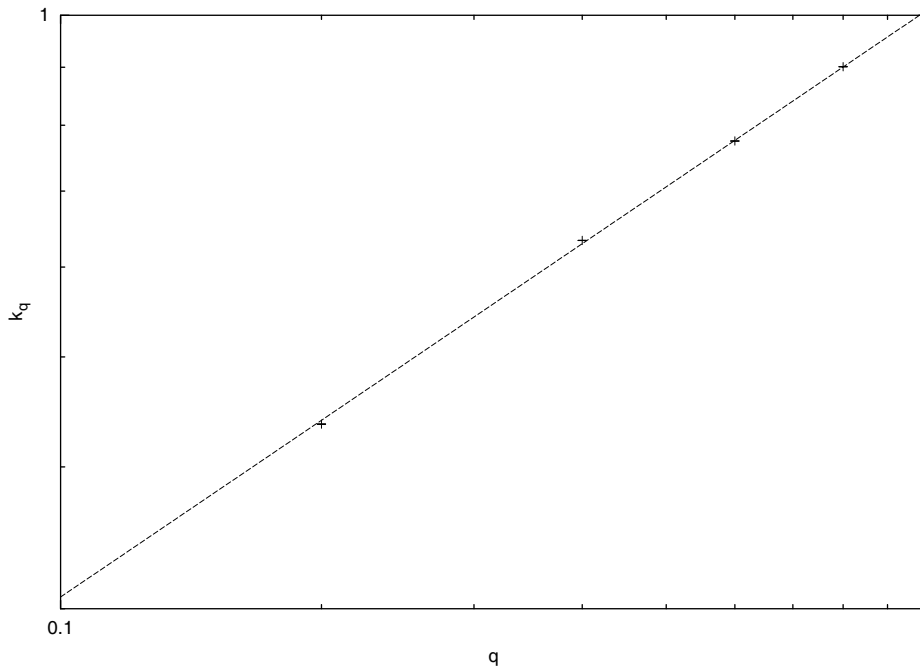
Slika 16: Zavisnost vrednosti $\frac{T_q}{t_q}$ za random izabranih $q = 80\%$ mreže od veličine mreže, $t_q = 0.958(2)$. Prikazana je i egzaktna zavisnost $T(n)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti T_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.



Slika 17: Zavisnost vrednosti $\frac{K_q}{k_q}$ za random izabranih $q = 60\%$ mreže od veličine mreže, $k_q = 0.7855(1)$. Prikazana je i egzaktna zavisnost $K(n)$. Parametri mreže su $n_0 = 10, p = 0.5, m = 6$, a vrednosti K_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.



Slika 18: Zavisnost koeficijenta t_q od vrednosti q fitovana na funkciju $y = \alpha_t x^{\beta_t}$, $\alpha_t = 1.03(1)$, $\beta_t = 0.27(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10, p = 0.5, m = 3$.



Slika 19: Zavisnost koeficijenta k_q od vrednosti q fitovana na funkciju $y = \alpha_k x^{\beta_k}$, $\alpha_k = 1.010(3)$, $\beta_k = 0.517(7)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 7$.

| m | α_t | β_t | α_k | β_k |
|-----|------------|-----------|------------|-----------|
| 1 | - | - | 1.01(2) | 0.47(2) |
| 2 | 1.004(6) | 0.224(7) | 0.992(3) | 0.469(3) |
| 3 | 1.03(1) | 0.27(3) | 1.012(2) | 0.489(6) |
| 4 | 1.017(7) | 0.28(2) | 0.999(5) | 0.49(1) |
| 5 | 1.025(6) | 0.27(2) | 1.015(2) | 0.506(3) |
| 6 | 1.022(6) | 0.28(2) | 1.012(2) | 0.514(2) |
| 7 | 1.010(6) | 0.28(2) | 1.010(3) | 0.517(7) |
| 8 | 1.007(6) | 0.27(2) | 1.001(3) | 0.49(2) |

Tabela 2: Vrednosti koeficijenata $\alpha_t, \beta_t, \alpha_k, \beta_k$ za razne parametre mreže m .

Zaključak

U ovom radu ispitivali smo globalne i strukturne osobine scale-free mreža. Korištili smo Barabaši-Albert model za generisanje mreže sa stepenom (scale-free) raspodelom povezanosti dodavanjem novih čvorova stepena m .

Poznate zavisnosti small world koeficijenta i klastering koeficijenta od veličine mreže smo proširili na zavisnost po parametru m .

Pronašli smo zavisnosti podstruktura veličine tri (trouglova i krakova) od veličine mreže i parametra m .

Ispitali smo uspešnost brojanja trouglova i krakova po random i preferencijalno biranom podskupu S čvorova kao heuristike za ocenu broja trouglova i krakova na nivou cele mreže. Random odabir se pokazao kao jednostavniji, ali manje precizan metod. Za preferencijalni odabir smo odredili formule i izračunali potrebne koeficijente za $m = 1, 2, \dots, 8$ pomoću kojih se može oceniti broj pojavljivanja podstruktura veličine tri u zavisnosti od veličine podskupa S .

Ove heurističke metode posebno mogu naći primenu kod karakterisanje lokalnih svojstava mreža sa velikim brojem čvorova, zbog velike uštede vremena pri prebrojavanju podstruktura.

Zahvalnice

Zahvaljujem se Istraživačkoj stanici Petnica, a posebno Jeleni Grujić, šefu seminara fizike - u okviru kojih sam radila ovaj projekat. Zahvaljujem se svom mentoru Dr. Aleksandru Beliću za korisne savete, kao i celoj Laboratoriji za primenu računara u nauci Instituta za fiziku u Beogradu što su mi omogućili da za potrebe svojih istraživanja koristim najnapredniju računarsku opremu. Zahvaljujem se i Milošu Srećkoviću i Milošu Saviću za korisne komentare i diskusije koje smo vodili na temu scale-free mreža.

Literatura

1. Reka Albert¹, Albert-Laszlo Barabasi², 2000, *Statistical Mechanics of Complex Networks*, ¹School of Mathematics, 127 Vincent Hall, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455, ²Department of Physics, College of Science, 225 Nieuwland Science Hall, University of Notre-Dame, Notre-Dame, Indiana 46556
2. S. S. Manna, 2003, *Diffusion limited friendship network: A model for six degrees of separation*, Satyendra Nath Bose National Centre for Basic Sciences Block-JD, Sector-III, Salt Lake, Kolkata-700098, India
3. Danilo Sergi, 2005, *Random graph model with power-law distributed triangle subgraphs*, Departement de Physique Theorique, Universite de Geneve, 1211 Geneve 4, Switzerland