Wickova teorema i primene

1. Pokazati da važe sledeće formule (λ realni parametar, operatori $\hat{a}_f, \hat{a}_f^\dagger$ mogu biti bozonski ili fermionski operatori)

$$\hat{a}_f \, \mathrm{e}^{\lambda \hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f} = \mathrm{e}^{\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda \hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f} \hat{a}_f, \qquad \hat{a}_f^\dagger \, \mathrm{e}^{\lambda \hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda \hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f} \hat{a}_f^\dagger.$$

Koristeći izvedene relacije pokazati da važi

$$\langle \hat{a}_{f_1} \hat{a}_{f_2} \rangle_0 = \langle \hat{a}_{f_1}^\dagger \hat{a}_{f_2}^\dagger \rangle_0 = 0,$$

$$\langle \hat{a}_{f_1}^\dagger \hat{a}_{f_2} \rangle_0 = \delta_{f_1 f_2} \bar{n}_{f_1}, \qquad \langle \hat{a}_{f_1} \hat{a}_{f_2}^\dagger \rangle_0 = \delta_{f_1 f_2} (1 \mp \bar{n}_{f_1}),$$

gde je srednja popunjenost $\bar{n}_f$ kvantnog stanja f jednaka $\bar{n}_f = \left(\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_f - \mu)} \pm 1\right)^{-1}$ (gornji znak odgovara fermionima, a donji bozonima). Oznaka $\langle \ldots \rangle_0$ označava usrednjavanje po velikom kanonskom ansamblu za sistem neinteragujućih čestica (idealni gas) opisan Hamiltonijanom $\hat{H}_0 = \sum_f \varepsilon_f \hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f$

$$\langle \ldots \rangle_0 = \frac{\mathrm{Tr}\left(\ldots \mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} \right)}{\mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})}}.$$

2. Za trodimenzionalni idealni elektronski gas na temperaturi $T = 0$ izračunati korelacionu funkciju

$$R_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}') \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle.$$

Posebno razmotriti slučajeve:

(a) $\sigma \neq \sigma'$,

(b) $\sigma = \sigma'$ u limesu malih rastojanja $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll k_F^{-1}$,

(c) $\sigma = \sigma'$ u limesu velikih rastojanja $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg k_F^{-1}$,

gde je k_F Fermijev talasni vektor.

3. Korelaciona funkcija fluktuacija gustine broja čestica $\nu(|\mathbf{r}|)$ je definisana izrazom

$$\langle \Delta\hat{\rho}(\mathbf{r}_1) \Delta\hat{\rho}(\mathbf{r}_2) \rangle = \bar{\rho}\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \bar{\rho}\, \nu(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|),$$

gde je $\Delta\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\rho}(\mathbf{r}) - \hat{\bar{\rho}}$, $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ je operator gustine broja čestica u tački $\mathbf{r}$, dok je $\hat{\bar{\rho}} = \hat{N}/V$. Pokazati da je (koristeći bazis ravnih talasa)

$$\nu(\mathbf{r}) = \mp \frac{1}{\bar{\rho}} \sum_\sigma \left| \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \, \bar{n}_{\mathbf{p},\sigma} \right|^2,$$

gde je $\bar{\rho} = \langle \hat{N} \rangle / V$, dok je $\bar{n}_{\mathbf{p},\sigma}$ srednja popunjenost jednočestičnog kvantnog stanja $(\mathbf{p}, \sigma)$. Gornji znak odgovara fermionima, a donji bozonima.

4. Koristeći rezultat zadatka 3 naći korelacionu funkciju $\nu(r)$ za idealni gas fermiona na temperaturi $T = 0$ na rastojanjima $r \gg \hbar/p_F$, gde je p_F Fermijev impuls.

5. Posmatrajmo idealni gas fotona u zapremini V i na temperaturi T. Disperziona relacija fotona je $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar c |\mathbf{k}|$, gde je $\mathbf{k}$ talasni vektor fotona. Izračunati srednji broj fotona $\langle \hat{N} \rangle$ i relativnu fluktuaciju srednjeg broja fotona $\dfrac{\Delta N}{\langle \hat{N} \rangle}$, gde je $(\Delta N)^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2$.