Superfluidnost

1. Pokazati da se Hamiltonijan slabo neidealnog Bose gasa (N bozona spina 0 u zapremini V)

$$\hat{H} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N^2}{V}\left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right) + \sum_{\mathbf{p}}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\left(\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} + 2\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\right)$$

prelaskom na operatore $\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$ ($\mathbf{p}\neq 0$) relacijama

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \mathrm{ch}(\theta_p)\,\hat{b}_{\mathbf{p}} + \mathrm{sh}(\theta_p)\,\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{p}}, \qquad \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} = \mathrm{sh}(\theta_p)\,\hat{b}_{\mathbf{p}} + \mathrm{ch}(\theta_p)\,\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{p}}$$

dijagonalizuje pod uslovom da za parametre θ_p važi

$$\mathrm{th}(2\theta_p) = -\frac{\frac{4\pi\hbar^2 aN}{mV}}{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{4\pi\hbar^2 aN}{mV}}.$$

Naći disperziju kvazičestičnih pobuđenja $\varepsilon(p)$ i odrediti brzinu zvuka u. Odrediti naredni član u razvoju sledećih veličina

(a) energija osnovnog stanja $E_0 = \dfrac{2\pi\hbar^2 aN^2}{mV}$

(b) hemijski potencijal na $T=0$, $\mu(T=0) = \dfrac{4\pi\hbar^2 aN}{mV}$

(c) pritisak na $T=0$, $p(T=0) = \dfrac{2\pi\hbar^2 aN^2}{mV^2}$

(d) brzina zvuka na $T=0$, $u(T=0) = \sqrt{\dfrac{4\pi\hbar^2 aN}{m^2V}}$

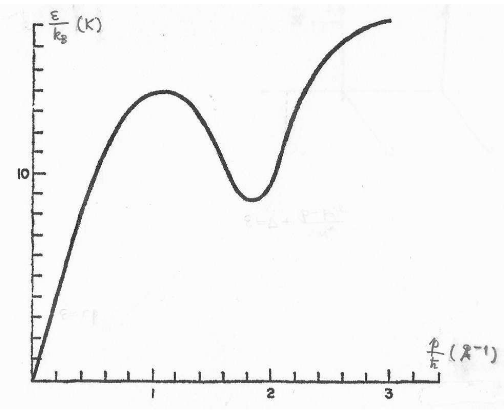
u stepeni red po stepenima malog parametra $\sqrt{na^3}$, gde je $n = N/V$, dok je a dužina rasejanja.

2. Koristeći rezultate zadatka 1

(a) naći relativni broj čestica van kondenzata na nuli temperature;

(b) izraziti operator ukupnog impulsa čestica pomoću kvazičestičnih operatora $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$.

3. Ponašanje ^{4}He na niskim temperaturama može se opisati modelom (Landau, 1941, 1947) po kome se ^{4}He sastoji od superfluida energije E_s i kvazičestičnih ekscitacija čija je disperziona relacija (zavisnost kvazičestične energije ε od talasnog vektora $p = |\mathbf{p}|$) prikazana na slici. Podaci dobijeni u eksperimentima rasejanja neutrona daju da se za male



p kriva $\varepsilon(p)$ može aproksimirati linearnim zakonom $\varepsilon(p) = up$, pri čemu je $u = 2.4\times 10^2\,\mathrm{ms}^{-1}$. Ove kvazičestične ekscitacije odgovaraju običnim hidrodinamičkim zvučnim talasima, odnosno fononima, a u je brzina zvuka. Minimum koji se uočava pri vrednostima impulsa u okolini $p_R/\hbar = 1.9\,\mathring{A}^{-1}$ (rotonski minimum) se može opisati zakonom $\varepsilon(p) = \varepsilon(p_R) + \dfrac{(p-p_R)^2}{2m_R} + O((p-p_R)^3)$, pri čemu je $\varepsilon(p_R) = \Delta$, gde je $\Delta/k_B = 8.7\,\mathrm{K}$, dok je $m_R = 0.16\,m(^4\mathrm{He}) = 6.65\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Ove kvazičestične ekscitacije nazivaju se rotonima.

(a) Izračunati srednji broj fonona N_{ph}, fononski doprinos entropiji S_{ph} i toplotnom kapacitetu $C_{V,\mathrm{ph}}$ na temperaturi T.

(b) Izračunati srednji broj rotona N_{rot}, rotonski doprinos entropiji S_{rot} i toplotnom kapacitetu $C_{V,\mathrm{rot}}$ na temperaturi T.