Superprovodnost

1. **Cooperov zadatak**

   (a) Pokazati da dva elektrona koji međusobno interaguju privlačnom interakcijom u prisustvu potpuno popunjenog Fermijevog mora na nuli temperature formiraju vezano stanje (tzv. Cooperov par) i naći energiju veze E_b. Zanemariti interakciju posmatranog para elektrona sa elektronima iz Fermijevog mora. Pretpostaviti da se orbitalni deo talasne funkcije osnovnog stanja para može razviti po bazisu ravnih talasa kao

   $$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ |\mathbf{k}| > k_F}} g_{\mathbf{k}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}.$$

   Takođe, pretpostaviti da su matrični elementi potencijala međusobne interakcije posmatranog para elektrona (Ω je zapremina na koju se vrši normiranje)

   $$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \, V(\mathbf{r})$$

   oblika

   $$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \xi_{\mathbf{k}} \leq \hbar\omega_c \text{ i } \xi_{\mathbf{k}'} \leq \hbar\omega_c \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

   gde je $V > 0$, $\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F$, $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/(2m)$, dok je $\hbar\omega_c \ll \varepsilon_F$. Specijalno, naći E_b u limesu $N(0)V \ll 1$, gde je $N(0)$ jednočestična gustina stanja na Fermijevoj površi za jednu vrednost spina. Prokomentarisati dobijeni rezultat za energiju veze E_b.

   (b) Izračunati srednji radijus Cooperovog para u osnovnom stanju, koji se definiše kao $\xi_0 = \sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle}$, gde je $\mathbf{r}$ vektor relativnog položaja jednog elektrona iz para u odnosu na drugi, dok je

   $$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{\int \mathrm{d}\mathbf{r} |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r}^2}{\int \mathrm{d}\mathbf{r} |\psi_0(\mathbf{r})|^2}.$$

   Koristiti da relevantne energije u problemu zadovoljavaju $E_b \ll \hbar\omega_c \ll \varepsilon_F$.

2. Razmotriti BCS modelni Hamiltonijan ($\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu$)

   $$H_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{-\mathbf{k}'\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}'\uparrow}.$$

   (a) Smatrajući da su, u osnovnom i nisko-ležećim pobudjenim stanjima, očekivane vrednosti $b_{\mathbf{k}} = \langle \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle \neq 0$ i uzimajući da su fluktuacije odgovarajućih operatora oko tih srednjih vrednosti male, pokazati da se BCS modelni Hamiltonijan može zapisati kao

   $$H_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \left(\Delta_{\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} + \Delta^*_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}},$$

   gde je uvedena oznaka $\Delta_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'}$.

   (b) Uvodeći kanonsku transformaciju (Bogoljubov, Valatin, 1958)

   $$\begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^*_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}} \\ -v^*_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{\gamma}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix},$$

   pokazati da se BCS Hamiltonijan može zapisati u obliku

   $$H_{\mathrm{BCS}} = E_{\mathrm{GS}} + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{\gamma}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{\gamma}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{\gamma}_{-\mathbf{k}\downarrow} \right).$$

   Naći uslov koji treba da zadovoljavaju $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}, \Delta_{\mathbf{k}}$. Izraziti energiju osnovnog stanja E_{GS} i disperzionu relaciju kvazičestica $E_{\mathbf{k}}$ (tzv. Bogoljubona) u funkciji $\xi_{\mathbf{k}}$ i $\Delta_{\mathbf{k}}$.

(c) Formulisati uslov samousaglašenosti za određivanje temperaturske zavisnosti parametra $\Delta_{\mathbf{k}}$. Pretpostaviti da su matrični elementi interakcije

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & |\xi_{\mathbf{k}}| \leq \hbar\omega_c \text{ i } |\xi_{\mathbf{k}'}| \leq \hbar\omega_c \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Izračunati $\Delta_{\mathbf{k}}$ na $T = 0$ (smatrati da je $N(0)V \ll 1$), kao i kritičnu temperaturu T_c prelaska u normalno stanje.

(d) Izračunati energiju kondenzacije na $T = 0$, tj. energijsku razliku između superprovodnog i normalnog stanja na $T = 0$.

3. (a) Pokazati da se entropija idealnog gasa fermiona može izračunati koristeći izraz

$$S = -k_B \sum_f \left((1 - \bar{n}_f)\ln(1 - \bar{n}_f) + \bar{n}_f \ln \bar{n}_f\right),$$

gde je $\bar{n}_f$ srednji broj popunjenosti kvantnog stanja f.

(b) Koristeći izraz za entropiju izveden u delu zadatka (a), izračunati skok toplotnog kapaciteta $\Delta C = (C_s - C_n)_{T_c}$ pri prelasku iz superprovodnog u normalno stanje na temperaturi $T = T_c$. Koristiti da je za $T \to T_c - 0$ zavisnost energijskog procepa od temperature oblika

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}.$$