18.IX 2019.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Posmatrajmo jednodimenzionalni harmonijski oscilator mase m i frekvencije Ω koji je u ravnoteži sa termostatom temperature T.

   (a) Izračunati korelacionu funkciju
   $$C_{xx}(t) = \langle \hat{x}(t)\hat{x}(0)\rangle,$$
   gde je $\hat{x}(t)$ operator koordinate oscilatora u Heisenbergovoj slici, dok se usrednjavanje vrši po odgovarajućem statističkom operatoru. Napisati relaciju koja povezuje $C_{xx}(-t)$ i $C_{xx}(t)$.

   (b) Ispitati ponašanje korelacione funkcije $C_{xx}(t)$ u graničnim slučajevima visokih ($k_BT \gg \hbar\Omega$) i niskih ($k_BT \ll \hbar\Omega$) temperatura. Rezultat **ne** treba da sadrži temperaturske korekcije, već samo najdominantniji doprinos.

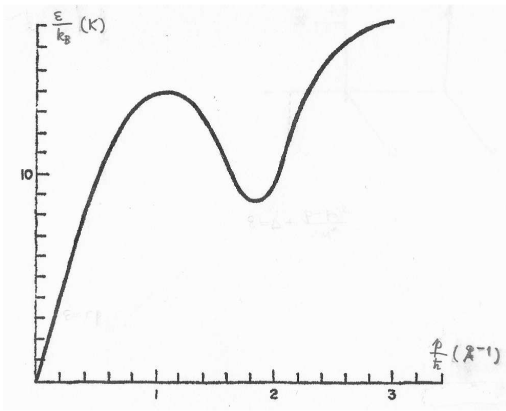
   (c) Izračunati Fourierovu transformaciju $C_{xx}(\omega)$ korelacione funkcije i pokazati da se može napisati u obliku
   $$C_{xx}(\omega) = C'_{xx}(\omega) + C''_{xx}(\omega),$$
   pri čemu je $C'_{xx}(-\omega) = C'_{xx}(\omega)$, dok je $C''_{xx}(-\omega) = -C''_{xx}(\omega)$. Uveriti se da neparni deo $C''_{xx}(\omega)$ ne zavisi od temperature, tj. da je karakteristika oscilatora, i uspostaviti vezu između $C_{xx}(\omega)$ i $C''_{xx}(\omega)$.

2. Posmatrajmo idealni gas koji se sastoji od N fermiona sa jednočestičnom gustinom stanja $g(\varepsilon) = G\Theta(\varepsilon)$, gde je Θ Heavisideova step funkcija, dok je G realna konstanta odgovarajućih dimenzija.

   (a) Izraziti Fermijevu energiju ε_F funkciji N i G.

   (b) Izračunati hemijski potencijal gasa μ na proizvoljnoj temperaturi u funkciji ε_F i temperature T. Posebno, ispitati ponašanje μ u graničnim slučajevima niskih ($k_BT/\varepsilon_F \ll 1$) i visokih ($k_BT/\varepsilon_F \gg 1$) temperatura.

3. Ponašanje ^{4}He na niskim temperaturama može se opisati modelom (Landau, 1941, 1947) po kome se ^{4}He sastoji od superfluida i kvazičestičnih ekscitacija čija je disperziona relacija (zavisnost kvazičestične energije ε od impulsa $p = |\mathbf{p}|$) prikazana na slici.



   Minimum koji se uočava pri vrednostima impulsa u okolini $p_R/\hbar = 1.9\,\mathring{A}^{-1}$ se može opisati zakonom
   $$\varepsilon(p) = \varepsilon(p_R) + \frac{(p-p_R)^2}{2m_R} + O((p-p_R)^3),$$
   pri čemu je $\varepsilon(p_R) = \Delta$, gde je $\Delta/k_B = 8.7\,\mathrm{K}$, dok je $m_R = 0.16\,m(^4\mathrm{He}) = 6.65\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Ove kvazičestične ekscitacije nazivaju se rotonima. Naći srednji broj rotona N_{rot} pobuđenih na temperaturi T.

Zadatke pripremio
dr Veljko Janković

KSF X/'19

1. (a) $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right) \equiv \hat{x}(0)$

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}\left(\hat{b}^\dagger e^{i\Omega t} + \hat{b}\, e^{-i\Omega t}\right)$$

$$C_{xx}(t) = \frac{\hbar}{2m\Omega}\left\langle \left(\hat{b}^\dagger e^{i\Omega t} + \hat{b}\, e^{-i\Omega t}\right)\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right)\right\rangle$$

$$\boxed{C_{xx}(t) = \frac{\hbar}{2m\Omega}\left[e^{i\Omega t}\frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega}-1} + e^{-i\Omega t}\left(1 + \frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega}-1}\right)\right]}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\Omega}\left[e^{i\Omega t}\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right) - 1\right) + e^{-i\Omega t}\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right) + 1\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2m\Omega}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right)\frac{1}{2}\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right)\right]$$

$$\boxed{C_{xx}(t) = \frac{\hbar}{2m\Omega}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right)\cos(\Omega t) - i\sin(\Omega t)\right]}$$

$$C_{xx}(-t) = \frac{\hbar}{2m\Omega}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right)\cos(\Omega t) + i\sin(\Omega t)\right], \quad \boxed{C_{xx}(-t) = C^{*}_{xx}(t)}$$

(b) • $k_B T \gg \hbar\Omega$, $\mathrm{cth}\left(\frac{\hbar\Omega}{2k_B T}\right) \approx \frac{2k_B T}{\hbar\Omega}$, tj. $\mathrm{Re}\, C_{xx}(t)$ je direktno proporcionalan temperaturi, pa temperaturski nezavisni $\mathrm{Im}\, C_{xx}(t)$ može biti zanemaren u najnižoj aproksimaciji

$$\boxed{C_{xx}(t) \approx \frac{\hbar}{2m\Omega}\,\frac{2k_B T}{\hbar\Omega}\cos(\Omega t) = \frac{k_B T}{m\Omega^2}\cos(\Omega t), \quad k_B T \gg \hbar\Omega}$$

• $k_B T \ll \hbar\Omega$, $\mathrm{cth}\left(\frac{\hbar\Omega}{2k_B T}\right) \approx 1$

$$\boxed{C_{xx}(t) \approx \frac{\hbar}{2m\Omega}\, e^{-i\Omega t}, \quad k_B T \ll \hbar\Omega}$$

(c) $C_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} C_{xx}(t)$, $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i(\omega \pm \Omega)t} = 2\pi\,\delta(\omega \pm \Omega)$

$$C_{xx}(\omega) = \frac{\hbar}{2m\Omega}\left[2\pi\,\delta(\omega+\Omega)\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right) - 1\right) + 2\pi\,\delta(\omega-\Omega)\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right) + 1\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar\pi}{2m\Omega}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right)\underbrace{\left(\delta(\omega+\Omega) + \delta(\omega-\Omega)\right)}_{\text{kada } \omega \to -\omega} + \underbrace{\left(\delta(\omega-\Omega) - \delta(\omega+\Omega)\right)}_{\text{kada } \omega \to -\omega}\right]$$

$\longrightarrow \delta(-\omega+\Omega) + \delta(-\omega-\Omega) = \delta(\omega-\Omega) + \delta(\omega+\Omega)$

$\longrightarrow \delta(-\omega-\Omega) - \delta(-\omega+\Omega) = \delta(\omega+\Omega) - \delta(\omega-\Omega) = -\left(\delta(\omega-\Omega) - \delta(\omega+\Omega)\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} C'_{xx}(\omega) &= \frac{\hbar\pi}{2m\Omega}\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{2}\right)\left(\delta(\omega+\Omega) + \delta(\omega-\Omega)\right), \quad C'_{xx}(-\omega) = C'_{xx}(\omega) \\ C''_{xx}(\omega) &= \frac{\hbar\pi}{2m\Omega}\left(\delta(\omega-\Omega) - \delta(\omega+\Omega)\right), \quad C''_{xx}(-\omega) = -C''_{xx}(\omega) \end{aligned}}$$

$$C'_{xx}(\omega) = \frac{\hbar\pi}{2m\Omega}\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar(-\omega)}{2}\right)\delta(\omega+\Omega) + \frac{\hbar\pi}{2m\Omega}\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\delta(\omega-\Omega)$$

$$= \frac{\hbar\pi}{2m\omega}\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\left[\delta(\omega-\Omega) - \delta(\omega+\Omega)\right] \Rightarrow \boxed{C'_{xx}(\omega) = \mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) C''_{xx}(\omega)}$$

$$\boxed{C_{xx}(\omega) = \left(\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) + 1\right) C''_{xx}(\omega)}$$

2. $g(\varepsilon) = G\,\theta(\varepsilon)$ KSF X/'19

(a) $N = \int d\varepsilon\, \bar{n}(\varepsilon)\, g(\varepsilon)$, $\bar{n}(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$

$\underline{T=0}$: $N = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \cdot 1 \cdot G = \varepsilon_F \cdot G \Rightarrow \boxed{\varepsilon_F = N/G}$

(b) $N = \int d\varepsilon \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} G\,\theta(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} d\varepsilon \dfrac{G}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = \left\{ \begin{matrix} \beta\varepsilon = x \\ z = e^{\beta\mu} \end{matrix} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{-1}\, dx}{e^{x} z^{-1}+1} = k_B T \int_0^{+\infty} dx \frac{e^{-x}}{z^{-1}+e^{-x}} = \left\{ \begin{matrix} e^{-x} = t \\ dt = -e^{-x} dx \end{matrix} \right\}$$

$$= k_B T \int_1^{0} \frac{-dt}{z^{-1}+t} = k_B T \int_0^1 \frac{dt}{t+z^{-1}} = k_B T \left(\ln |t+z^{-1}| \right)_{t=0}^{1}$$

$$= k_B T \ln \left| \frac{1+z^{-1}}{z^{-1}} \right| = k_B T \ln (1+z) = k_B T \ln (1+e^{\beta\mu})$$

$$\Rightarrow \frac{N}{G} = k_B T \ln (1+e^{\beta\mu})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \equiv \beta\varepsilon_F = \ln(1+e^{\beta\mu})$$

$$e^{\beta\varepsilon_F} = 1 + e^{\beta\mu}$$

$$e^{\beta\mu} = e^{\beta\varepsilon_F} - 1$$

$$\boxed{\mu = k_B T \ln \left(e^{\beta\varepsilon_F} - 1 \right)}$$

(c) • $k_B T \ll \varepsilon_F$, $\varepsilon_F/(k_B T) \gg 1$, pa je odgovarajuća mala veličina $e^{-\beta\varepsilon_F}$

$$\mu = k_B T \ln \left(e^{\beta\varepsilon_F}(1-e^{-\beta\varepsilon_F}) \right) = k_B T \left[\beta\varepsilon_F + \ln(1-e^{-\beta\varepsilon_F}) \right] = \varepsilon_F + k_B T \ln(1-e^{-\beta\varepsilon_F})$$

$$\boxed{\mu \approx \varepsilon_F + k_B T \underbrace{\left(-e^{-\beta\varepsilon_F}\right)} = \varepsilon_F \left[1 - \frac{k_B T}{\varepsilon_F} e^{-\beta\varepsilon_F} \right]}$$

eksponencijalno mala korekcija na rezultat $\mu(T=0) = \varepsilon_F$ u oblasti niskih T

• $k_B T \gg \varepsilon_F$, $e^{\beta\varepsilon_F} \simeq 1 + \beta\varepsilon_F$

$$\mu = k_B T \ln \left(1 + \beta\varepsilon_F + \ldots - 1 \right) = k_B T \ln \left(\frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) = -k_B T \ln \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)$$

odnosno ispoljava tipično visokotemperatursko ponašanje $\mu \propto -T \ln T$
(u klasičnoj oblasti, μ je negativan i veliki po apsolutnoj vrednosti)

KSF X/'19

3. $N_{rot} = \sum_{\vec{p}\sigma}{}' \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_p} - 1}$ pri čemu sumiramo po onim $\vec{p}$ za koje je disperziona relacija data u tekstu zadatka zadovoljena ($|\vec{p}|$ u okolini p_R)

$\sum_\sigma \to 1$ (fononi i rotoni pripadaju istoj disperziji, samo u različitim opsezima energije; fononi su u tečnosti samo longitudinalni)

$$N_{rot} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p_R^{min}}^{p_R^{max}} dp\, 4\pi p^2 \frac{1}{e^{\beta\Delta} e^{\beta(p-p_R)^2/2m_R} - 1}$$

$$\left.\begin{matrix} T \lesssim 1K \\ \Delta/k_B = 8.7\,K \end{matrix}\right\} \boxed{\frac{\Delta}{k_B T} \gtrsim 10 \Rightarrow e^{\frac{\Delta}{k_B T}} \gtrsim e^{10}} \Rightarrow e^{\beta\Delta} \underbrace{e^{\beta\frac{(p-p_R)^2}{2m_R}}}_{\geq 1} \gtrsim e^{10}$$

$$N_{rot} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \times 4\pi \int_{p_R^{min}}^{p_R^{max}} dp\, p^2\, e^{-\beta\Delta} e^{-\beta\frac{(p-p_R)^2}{2m_R}} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} e^{-\beta\Delta} \int_{p_R^{min}}^{p_R^{max}} dp\, p^2 \underbrace{e^{-\beta\frac{(p-p_R)^2}{2m_R}}}$$

karakteristična impulsna skala ovog Gaussijana je $\boxed{\sigma_p = (m_R k_B T)^{1/2}}$

$$\sigma_p \lesssim \sqrt{6.65 \times 10^{-27} kg \times 1.38 \times 10^{-23}\, JK^{-1} \cdot 1K}$$

$$\frac{\sigma_p}{\hbar} \lesssim \frac{\sqrt{6.65 \times 1.38} \times 10^{-25}\, kg\, m\, s^{-1}}{1.054 \times 10^{-34}\, kg\, m^2 s^{-2} \cdot s} = \frac{\sqrt{6.65 \times 1.38}}{1.054} \times 10^9\, m^{-1} = \frac{\sqrt{6.65 \times 1.38}}{1.054} \times 10^9 \times 10^{-10}\, Å^{-1}$$

$$1Å = 10^{-10}\, m \Rightarrow 1m = 10^{10}\, Å \Rightarrow 1m^{-1} = 10^{-10}\, Å^{-1}$$

$\frac{\sigma_p}{\hbar} \leq 0.3\, Å^{-1}$ odnosno Gaussijan je dosta uzan (i centriran oko p_R)

$$N_{rot} \simeq \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} e^{-\beta\Delta} p_R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m_R}} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} e^{-\beta\Delta} p_R^2 \sqrt{2\pi m_R k_B T}$$

$$\boxed{N_{rot} \simeq \frac{\sqrt{2\pi m_R k_B T}\, p_R^2 V}{2\pi^2\hbar^3} e^{-\beta\Delta}}$$