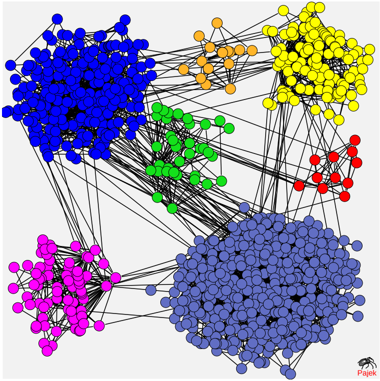
Spektralne osobine kompleksnih mreza sa mezoskopskim nehomogenostima

Seminar

Sadržaj

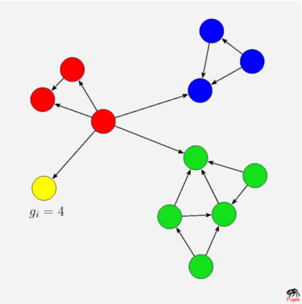
Kompleksni sistemi i mreže sa mezoskopskom strukturom

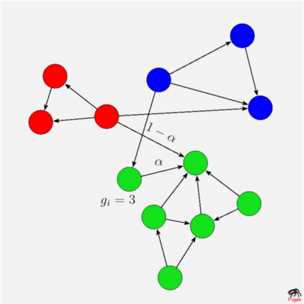


- Dinamički kompleksni sistemi-mreže.
- Kompleksne mreže – nehomogenosti na svim skalama.
- Mezoskopska skala - podgrafovi.
- Podgrafovi $\Leftrightarrow$ funkcija mreže.

- Različiti operatori povezni za strukturalnim i dinamičkim osbinama na mreži.
- Laplasijan, L - difuziona dinamika (sinhronizacija, random walk dinamika) na mrežama.
- Matrica povezanosti, A - struktura mreže.
- Ekstremalne svojstvene vrednosti povezane sa modularnom strukturom.

Model modularnih mreža



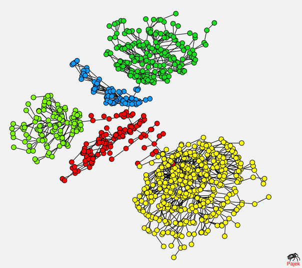


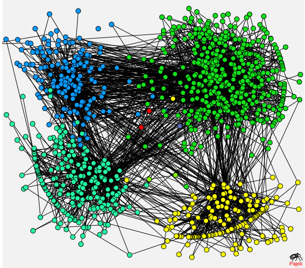
Parametri modela α, P_o and M.

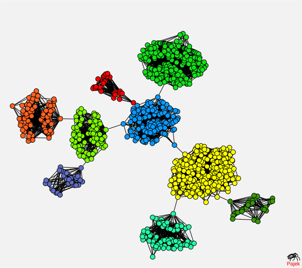
B.Tadić, Physica A 293,(2001).

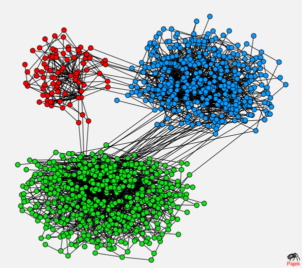
M. Mitrović and B. Tadić, arXiv, (2008)

Modularne mreže

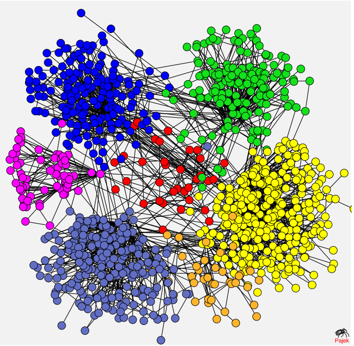




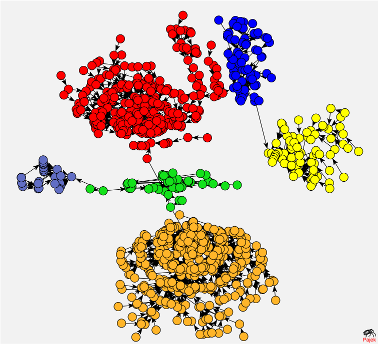




Modularne mreže



$M = 2$, $\alpha = 0.9$, $P_o = 0.006$



$M = 1$, $\alpha = 1$, $P_o = 0.006$

Struktura meže

Marija Mitrović

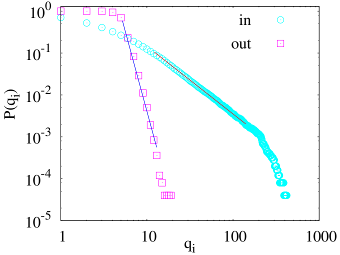
Uvod

Modeli mreža

Spektralne osobine matrice povezanosti

Spektralne osobine Laplasijana

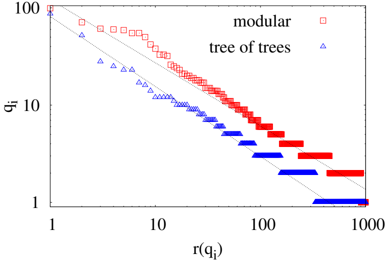
Zaključak



$$P(q_\kappa) \sim q_\kappa^{-\tau_\kappa}$$

$$\tau_{in} = 2.616 \pm 0.006$$

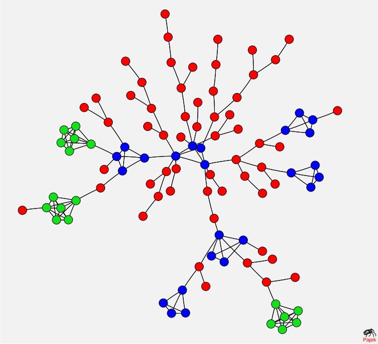
$$\tau_{out} = 8.6 \pm 0.3$$



$$P(q) \sim q^{-\tau}$$

$$\tau = 2 + \alpha, \tau = \frac{1}{\gamma} + 1$$

Drvo sa “klikovima”



- kilk $\Leftrightarrow$ potpuno povezani graf.
- klik je najjednostavniji oblik modula.
- Radnom drvo sa modulima veličine $n = 4$ i $n = 6$.

Metod

- Operatori za neusmerene i neotežinjene mreže su simetrični sa realnim spektrom.
- Algoritmi: Numerički recepti
- Veličine posmatranih mreža su $N = 1000$ čvorova. Rezultati za spektralne gustine su dobijeni usrednjavanjem po ansamblima veličine i do 750 mreža.

Spektralna gustina modularnih mreža

Marija Mitrović

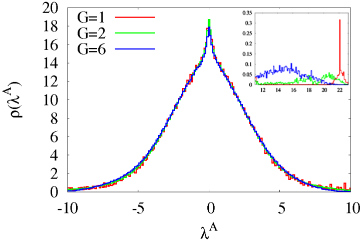
Uvod

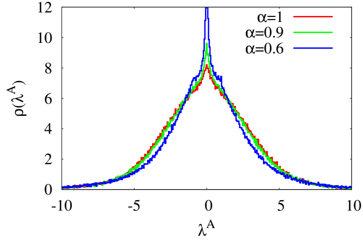
Modeli mreža

Spektralne osobine matrice povezanosti

Spektralne osobine Laplasijana

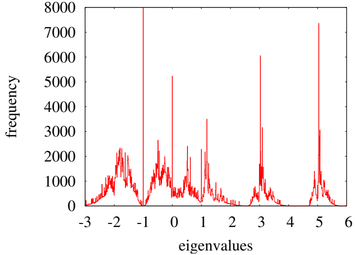
Zaključak





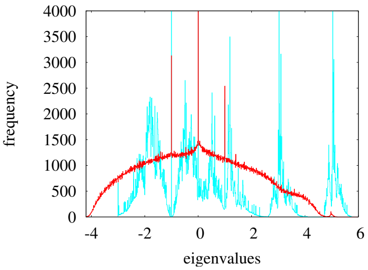
- Scale free mreže nisu random! *F*arkas et al., PRE 64 (2008)
- $\lambda_{max} \sim \sqrt{q_{max}}$.
- Broj modula odgovara broju najvećih svojstvenih vrednosti.
- $\rho(\lambda) \sim \lambda^{2\tau-1}$, $\lambda >> 1$. *D*orogovtsev et al., PRE 68 (2003) *R*odgers et al., Journal of Physics A 38 (2005)

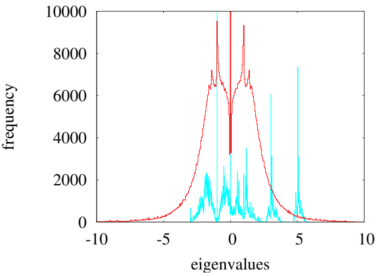
Drvo sa klikovima



- Klik veličine n: jedna $\lambda_{max} = n - 1$ i $n - 1$ put degenerisana $\lambda = -1$.
- Svojstvene vrednosti u bliskim okolinama $\lambda = 3$ i $\lambda = 5$ su u vezi sa postojanjem klikova $n = 4$ i $n = 6$.

Randomizovane mreže



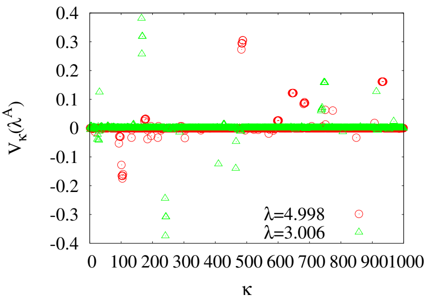


Očuvana raspodela povezanosti.

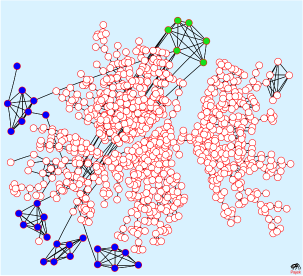
Stepena raspodela povezanosti.

Projekcije svojstvenih vektora

Marija Mitrović



Svojstveni vektori za $\lambda = 4.998$ i $\lambda = 3.006$



Projekcija u realnom prostoru svojstvenog vektora za $\lambda = 4.998$

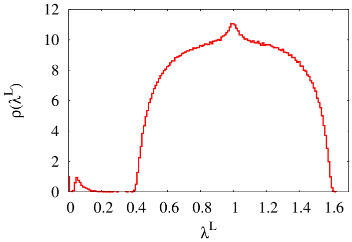
Random walk dinamika

- Laplasijan sinhronizacije $L_{ij} = q_i \delta_{ij} - A_{ij}$.
- Random walk dinamika $L_{ij} = \delta_{ij} - p_{ij}$ odgovara procesu $P_{ij} = -\sum_k P_{ik} L_{kj}$.
- Običan random walk $p_{ij} = \frac{1}{q_i} A_{ij}$.
- Normalizovan Laplasijan $p_{ij} = \frac{1}{\sqrt{q_i q_j}} A_{ij}$.
- Zašto normalizovan Laplasijan:
  - Sličan RW Laplasijan-u $\Rightarrow$ isti spektar. Operator sličnosti $S_{ij} = \delta_{ij} \sqrt{q_i}$
  - Simetričan $\Rightarrow$ realne svojstvene vrednosti, ortonormiran skup svojstvenih vektora.
  - Ograničen spektar u intervalu $[0, 2]$.

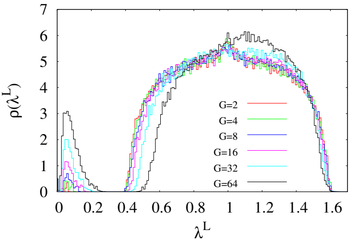
Osobine laplasiana

- Opšte osobine:
  - Pozitivno definitan $\Rightarrow \lambda \geq 0$.
  - Za povezanu mrežu postoji samo jedna $\lambda_{min} = 0$ sa svojstvenim vektorom $V_\kappa(\lambda = 0) = \sqrt(q_\kappa)$.
  - Broj svojstvenih vrednosti $\lambda = 0$ odgovara broju nepovezanih komponenti.
- Osobine karakteristične za modularne mreže:
  - Teorija perturbacije!
  - Broj svojstvenih vrednosti $\lambda \gtrsim 0$ je povezan sa brojem modula.
  - Svojstveni velktori za $\lambda \gtrsim 0$ su linearne kombinacije svojstvenih vektora za $\lambda = 0$ diskonektovanih modula.

Osobine Laplasijana modularnih mreža

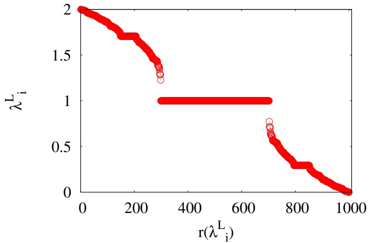


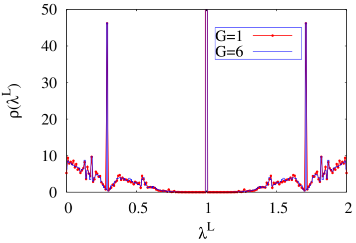
$M = 5$, $\alpha = 0.9$ i $G = 6$



$M = 5$, $\alpha = 0.9$ i $N = 1024$

Drvo drevta



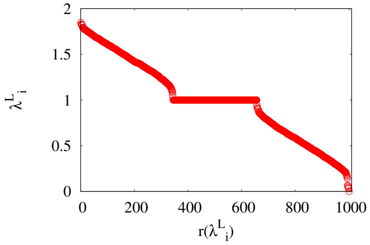


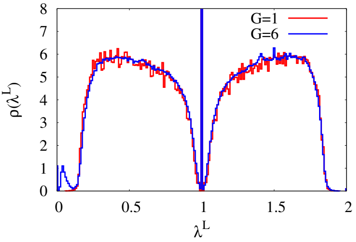
$M = 1$, $\alpha = 1$ i $G = 6$

$\lambda_{max} = 2$

Ne postoji razlika u gustini spektra izmedju drveta sa granama i običnog scale free drveta!

Modularna mreža

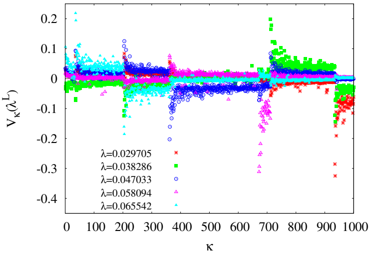




$M = 2$, $\alpha = 0.9$ i $G = 6$

$\lambda_{max} < 2$

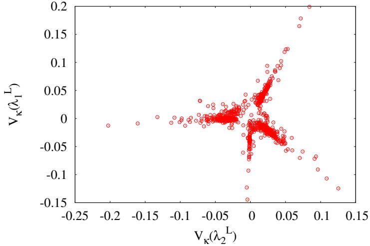
Svojstveni vektori



$M = 2$, $\alpha = 0.9$ i $G = 6$

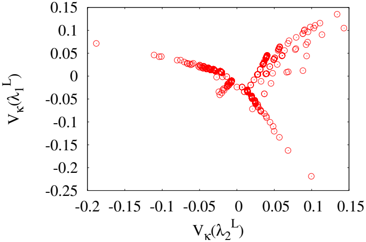
- Svojstveni vektori odražavaju scale free strukturu modula.
- Mogu poslužiti za definisanje inicajlne podele u različitim algoritmima.

Scatter plot



$M = 2$, $\alpha = 0.9$ i $G = 6$

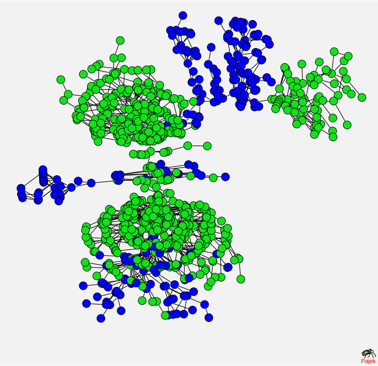
$\lambda_1 = 0.047$ i $\lambda_2 = 0.038$



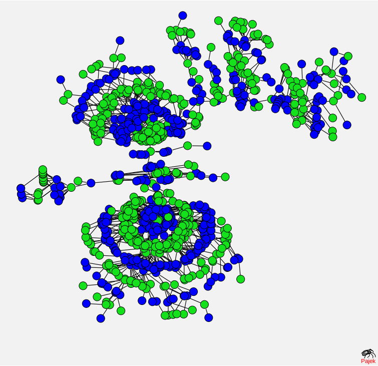
$M = 1$, $\alpha = 1$ i $G = 6$

$\lambda_1 = 0.00108$ i $\lambda_2 = 0.00033$

Relani prostor-drvo



$\lambda_1 = 0.004623$



$\lambda_{max} = 2$

Zaključak

- Modeli mreža sa mezoskopskim nehomogenostima.
- Spektralne osobine matrice povezanosti. Postojanje modula je povezano sa najvećim svojstvenim vrednostima.
- Spektralne osobine Laplasijana mogu poslužiti kao metode detektovanja modularne strukture mreža.